



LIETUVOS MATEMATIKŲ DRAUGIJOS LXVI KONFERENCIJOS SANTRAUKOS

Birželio 26–27 d., Klaipėda

Klaipėdos universitetas

Klaipėda
2025

Konferencijos programinis komitetas:

- Pirmininkas: dr. Artūras Štikonas (VU)
- Pirmininko pavaduotojas: dr. Kęstutis Dučinskas (KU)
- dr. Igoris Belovas (VU)
- dr. Audronė Jakaitienė (VU)
- dr. Vytautas Janilionis (KTU)
- dr. Roma Kačinskaitė (VU)
- dr. Ričardas Krikštolaitis (VDU)
- dr. Kęstutis Lukšys (KTU)
- dr. Jurgita Markevičiūtė (VU)
- dr. Bronė Narkevičienė (KTU)
- dr. Rimas Norvaiša (VU)
- dr. Darius Šiaučiūnas (VU)
- dr. Jonas Šiaulys (VU)
- dr. Olga Štikonienė (VU)

Konferencijos organizacinis komitetas:

- Pirmininkas: dr. Kęstutis Dučinskas (KU)
- Pirmininko pavaduotoja: dr. Laura Šaltytė-Vaisiauskė (KU)
- dr. Dalia Baziukė (KU)
- dr. Vitalij Denisov (KU)
- dr. Rasa Grigolienė (KU)
- dr. Marta Karaliutė (KU)

Bibliografinė informacija pateikiama Lietuvos integralios bibliotekų informacinės sistemos (LIBIS) portale ibiblioteka.lt

ISBN 978-609-481-250-7 (Leidinio forma: Elektroninis – PDF)

© Klaipėdos universitetas, 2025

Turiny

Plenariniai pranešimai	6
R. J. Kudžma , Atvirkštinės funkcijos	7
J. Mėžinė, R. Idzelytė , Baigtinių elementų metodo panaudojimas jūrinei prognozei	8
J. Šaltytė Benth , From classification to pandemic preparedness	9
Algebra, skaičių teorija ir geometrija	10
Ž. Baronėnas, P. Drungilas, J. Jankauskas , Tiesiniai nedidelio laipsnio algebrinių jungtinių skaičių sąryšiai	11
A. Geštautas , Beurlingo dzeta funkcijos diskretusis universalumas	12
M. Grigaliūnas , Analizinių funkcijų aproksimavimas periodinių dzeta funkcijų postūmiais trumpuose intervaluose	13
A. Grigutis , Picturesque convolution-like recurrences	14
R. Kačinskaitė , Apie diskretų mišrųjų jungtinį aproksimavimą dzeta funkcijų klasėmis	15
R. Macaitienė , Jungtinės ribinės teoremos Epšteino dzeta funkcijų rinkiniui	16
L. Maksimiak, A. Birštunas , Loop-check free sequent calculi for unary fragment of temporal logic	17
E. Manstavičius, A. Karbonskis , An analog of the forty-year Kubilius' inequality for permutations	18
T. Mikalauskaitė , Diskretusis analizinių funkcijų aproksimavimas apibendrintaisiais Lercho dzeta-funkcijos postūmiais	19
D. Šiaučiūnas , Hurvico dzeta funkcijos diskretusis universalumas trumpuose intervaluose	20
R. Šimėnas , Kai kurių dzeta funkcijų reikšmių pasiskirstymas	21
B. Togobickij, R. Kačinskaitė , Apie diskretų Selbergo-Štoidingo klasės jungtinį reikšmių pasiskirstymą	22
J. Tuite , Developments in the Cage Problem	23
Diferencialinės lygtys ir skaičiavimo metodai	24
U. Alekna, K. Bingelė, A. Štikonas , Antrosios eilės tikslumo diskrečiojo Šturmo ir Liuvilio uždavinio su dvitaške nelokaliąją sąlyga spektro tyrimas	25
R. Astrauskas, A. Vaicekauskas, V. Šumskas , Maišymo YAG sintezėje analizė: srities dydžio ir modelio dimensijos įtaka	26
A. Bakhit, O. Štikonienė, A. Štikonas , Baigtinių skirtumų schema dvimačiai Puasono lygčiai su integraline kraštine sąlyga	27
M. Iurchenko , Modeling of Inhomogeneous Characteristics of a Piezoelectric Ceramic Rod in the Region of a Dielectrically Isolated Section of an Electrode Coating Using Low-Frequency Tomography	28

N. Kozulinas, R. Astrauskas, I. Morkvėnaitė-Vilkončienė, L. Striška, Determination of contact force in AFM indentation experiments	29
K. Pupalaigė, M. Sapagovas, J. Novicki, Dvimatės netiesinės parabolinės lygties su nelokaliois kraštinėmis sąlygomis skirtuminės schemos stabilumas ir konvergavimas	30
V. Šumskas, R. Astrauskas, Mechaninio maišymo modeliavimas YAG sin- tezeje	31
Matematikos istorija ir didaktika	32
I. Belovas, Iš VU Matematikos ir informatikos fakulteto naujausios istorijos: studentų priėmimo į matematines specialybes raida (1991-2024 m.m.)	33
M. Grigaliūnienė, S. Gabel, M. Sajka, I. Semanišínová, P. Konečná, J. Star, E. Lehtinen, Pedagogical Content Knowledge, Mathematical Flexibility, and Teaching Self-Efficacy of Preservice Mathematics Teachers in the Czech Republic, Germany, Lithuania, Poland, and Slovakia: a Comparative Study	34
I. Ilickienė, R. Juozaitienė, S. Urbonienė, Motyvacijos mokytis matematika sąsajų su savijauta matematikos pamokose ir su matematikos pritaikomo suvokimu tyrimas	35
K. Kanišauskienė, Jaunųjų matematikų varžybų komandinių ir individualių rezultatų palyginimas	36
I. Kilienė, Dešimtainė skaičiavimo sistema: kaip išmokti tai, ką gerai mokam?	37
E. Mazėtis, G. Melnichenko, Įdomios plokštumos kreivės	38
R. Norvaiša, Netaisyklingos matematikos pavyzdžiai lietuviškuose vadovėliuose	39
A. Novikas, J. J. Mačys, Trumpas pagrindinės algebros teoremos įrodymas	40
R. Vilkas, Mokyklinės matematikos programos kritika	41
Matematikos taikymai	42
M. Bražėnas, E. Valakevičius, Informacijos moksliniame straipsnyje paieška panaudojant diskretaus laiko Markovo grandines	43
S. L. Dangi, M. Pal, Optimization of Underground Hydrogen Storage in Deep Saline Aquifers: A Reservoir Simulation Approach	44
K. Jablonskaitė, M. Landauskas, Complexity of Coding and Non-coding Regions in Genetic Code	45
A. Michalkovič, L. Dindienė, E. Sakalauskas, Apmokymo su klaidomis uždavinys multiplikacinėse nekomutuojančiose grupėse	46
K. Poškuvienė, I. Telksnienė, M. K. Ragulskis, Laiko vėlinimų optimizavimo algoritmas laiko eilučių rekonstravimo uždavinyje	47
P. Sabanskytė, M. Landauskas, Estimation of Remaining Useful Life of Bearings Using Hankel Matrices	48
J. Žitkevičius, A. Michalkovič, Patobulinto matricinio laipsnio funkcija paremto blokinio šifro taikymas skaitmeniniams vaizdams šifruoti	49
Statistika ir jos taikymai	50
E. Bareikaitė, A. Budzevičiūtė, R. Levulienė, Saulės elektrinių veikimo analizė	51
K. Bartkus, A. Račkauskas, Changed segment tests via norm and Brownian projection	52

A. Birbilas, A. Račkauskas , Change-Point Detection in Functional First-Order Auto-Regressive Models	53
U. Deinoravičiūtė, J. Markevičiūtė, P. Treigys , Time Series Cointegration Literature Study	54
K. Dučinskas, M. Karaliutė , Spatial supervised classification based on continuous Hidden Semi-Markov Model via LISA indexes	55
R. Eidukevičius , Keli ekologinių duomenų rinkimo pavyzdžiai	56
M. Gervytė, T. Žvirblis , Functional Data Analysis of Biomedical Near-Infrared Spectroscopy Signals	57
R. Grigolienė, J. Janutėnienė, G. Vainorė , Tikimybių teorijos ir matematinės statistikos taikymai kokybės gerinimui gamybos įmonėse	58
M. Jokubaitis, I. Belovas , Vilniaus universiteto fakultetų XXI a. priėmimo rodiklių analizė ir prognozavimas	59
M. Karaliutė, K. Dučinskas , An approach to generative supervised classification of discrete time spatial data via Gamma Hidden Markov Models	60
G. Murauskas, M. Radavičius , Lietuviškų tekstų skiemenų statistika	61
V. Nekrašaitė-Liegė , Neatsakymų įtaka populiacijos parametrų vertinimui asimetriniuose duomenyse: metodų palyginimas	62
Tikimybių teorija ir jos taikymai	63
V. Čekanavičius, S. Jokubauskienė , Asimptotika daugiamatėje Le Cam teoremoje	64
M. Dirma, N. Nakliuda, J. Šiaulys , Haezendonck-Goovaerts rizikos mato asimptotika skirstinių su nuosaikiai kintančiomis uodegomis sumoms	65
S. Jokubauskienė , Simetrinių diskrečiųjų daugiamųjų vektorių sudėtinės Puasono aproksimacijos	66
V. Kanišauskas , Atstatymo proceso hipotezių tikrinimas esant lokaliajam asimptotiniam normalumui	67
M. Manstavičius , Konkordacijos matai, Borroni konstrukcija ir pavyzdžiai	68
J. Šiaulys, A. Eljio, R. Leipus, N. Nakliuda , Atsitiktinai sustabdytos sumos reguliarumo poveikis stabdymo momentui	69
M. Vaičiulis , Ribinė teorema apibendrintoms Hill statistikoms	70
Informatika ir dirbtinis intelektas	71
V. Denisov, A. Diržytė, L. Sakalauskas , Iteracinis agentinio modelio kūrimas nerimo sklaidai modeliuoti	72
I. Jurčenko, I. Belovas , Dinaminis aktyvų paskirstymas mišriuose investiciniuose portfeliuose kintančių ekonominių ir politinių rizikų aplinkoje	73
G. Korvel, J. Ramonaitė, D. Zakševski, G. Tamulevičius , Šnekos signalo kokybės didinimas naudojant gilųjį mokymąsi ir triukšmo profiliavimą	74
S. Rimašauskas, I. Belovas, R. Gričius , Aktualių kredito rizikos įvertinimo algoritmų palyginimas	75
L. Sakalauskas, N. Urbonaitė , Generalized Kolmogorov Brownian Field Model	76
D. Zolba , Efektyvus vandens ženklų taikymas didelių žiūrovų skaičiui identifikacijai	77
Rodyklė	78

Plenariniai pranešimai

Atvirkštinės funkcijos

Ričardas Juozas Kudžma

Vilniaus universitetas

Prieš 23 metus atspausdinau straipsnį žurnale *Alfa plus omega* [1] apie atvirkštinę funkciją. Tvirtinau, kad atvirkštinės funkcijos dėstymas ir grafiko braižymas naujame TEV leidyklos vadovėlyje [3] yra klaidingas. Vadovėlio autorių grupės vadovas V. Stakėnas atsakė, kad tai ne klaidingas, bet tradicinis požiūris [4]. Diskusija tarp mūsų neišsivystė. Taip 20 metų atvirkštinės funkcijos problema ir kabojo. Jos vengė programų sudarytojai, o vadovėliuose buvo dėstomas tradicinis požiūris. O aš įvairiose konferencijose dėščiau savo požiūrį [2]. Manau, kad dabar galiu suderinti abu požiūrius. Pirmiausia reikėtų atskirti funkcijos žymėjimą nuo lygties. Mes apsiribosime funkcijomis, kurių apibrėžimo bei reikšmių sritys realieji skaičiai. Funkciją f žymėsime $f : x \mapsto f(x)$. Žymuo $y = f(x)$ reikš tik lygtį. Mano straipsnyje [1] pastarasis žymuo reiškė funkcijos apibrėžimą ir lygtį. V. Stakėnas [4] naudojo abu žymenis. Jei turime kitą funkciją $g : x \mapsto g(x)$ ir abiejų funkcijų apibrėžimo bei reikšmių sritys suderintos, galime apibrėžti sudėtines funkcijas $f \circ g(x) = f(g(x))$ ir $g \circ f(x) = g(f(x))$. Sakysime, $f(x) = \frac{9}{5}x + 32$, $g(x) = \frac{5}{9}(x - 32)$.

Teisingos sąlygos $f(g(x)) = \frac{9}{5} \cdot \frac{5}{9}(x - 32) + 32 = x$, $g(f(x)) = \frac{5}{9} \cdot (\frac{9}{5}x + 32 - 32) = x$ su visais realiaisiais x . Vadinasi, funkcijos f ir g yra viena kitai atvirkštinės funkcijos. Aibė plokštumos taškų su koordinatėmis $(x; f(x))$ vadinama funkcijos f grafiku. Vienoje plokštumoje galima nubrėžti abiejų funkcijų f ir g grafikus. Pastebėsime, kad naudojome tik vieną kintamąjį x .

Funkcijos f ir g reiškia sąryšį tarp Celsijaus C ir Farenheito F laipsnių $f : C \mapsto \frac{9}{5}C + 32$, $g : F \mapsto \frac{5}{9}(F - 32)$. Atitinkamos lygtys $\frac{9}{5}C + 32 = F$ ir $\frac{5}{9}(F - 32) = C$. Šios lygtys ekvivalenčios. Abi jos reiškia tą pačią tiesę koordinatinių plokštumoje, kur abscisių ašyje yra koordinatė C , o ordinačių ašyje – koordinatė F . Iš abscisių ašies tiesė reiškia funkcijos f grafiką, o iš ordinačių ašies – funkcijos g grafiką. Tiesa, g grafiku šioje koordinatinių plokštumoje reikia laikyti aibę su koordinatėmis $(g(F); F)$. Mes negalime keisti tiesės arba ryšio tarp Celsijaus ir Farenheito laipsnių, mes laisvi keisti žiūros tašką. Tai įprasta mano matematinių ženklų iš akmenų kolekcijoje – žiūrint į objektą iš skirtingų pusių, matome skirtingus ženklus. Jei norime, kad g grafikas būtų su koordinatėmis $(F; g(F))$, reikia ne tik tiesę (f grafiką), bet ir koordinatinių ašis, atvaizduoti simetriškai pirmojo ketvirčio pusiaukampinės atžvilgiu.

Literatūra

- [1] Kudžma, R. 2002. Atvirkštinė funkcija ir jos grafikas. *Alfa plus omega*, 3(16): 43-47.
- [2] Kudžma, R., 2004, Inverse function and semiotics Teaching Mathematics: Retrospective and Perspectives, *Proceedings of the 5th International Conference 23-24 May*, Liepaja, p. 175-180.
- [3] Stakėnas, V. 2002. Atvirkštinė funkcija: tradicinis požiūris. *Alfa plus omega*, 3(16): 48-50.
- [4] Stakėnas, V. ir kiti. 2002. Matematika 11, I dalis. Vilnius, TEV. 21.

Baigtinių elementų metodo panaudojimas jūrinei prognozei *

Jovita Mėžinė

Klaipėdos universitetas

Pirmieji operatyvūs modeliai Baltijos jūros hidrodinaminei prognozei buvo pradėti kurti dar 1980 m. Jūrinių procesų modeliavimas prasidėjo nuo bangų prognozės modelio WAM [5], o šiuo metu modelių yra gausybė. Baltijos jūros regione, pagrindinė bendruomenė vienijanti visas Baltijos jūros šalis operatyvių modelių kūrimo, vystymo ir viešinimo yra Baltijos jūros operatyvioji okeanografinė sistema BOOS (angl. Baltic Sea Operational Oceanographic System) [3]. Klaipėdos universitetas yra asocijuotas BOOS partneris.

2023 m. pabaigoje Klaipėdos universitetas taip pat išvystė operatyvų hidrodinaminį modelį Kuršių marioms ir Lietuvos priekrantei bei tapo paskutine Baltijos jūros šalimi, turinčia savo operatyvias prognozes. Jūrinės prognozės skaičiavimas naudojamas atviro kodo baigtinių elementų modelis SHYFEM [4], skirtas seklių lagūnų ir priekrantės vandenių tyrimams. Šis modelis pietrytinės Baltijos jūros ir Kuršių marių tyrimams taikomas jau daugiau nei 15 metų [1, 2]. Baigtinių elementų metodas leidžia sukurti kintamą aukštos raiškos modelio gardelę, kuri ypač reikšminga hidrodinamiškai aktyviose vietose. Šiuo metu modelio skaičiavimai yra atliekami du kartus per parą, bei prognozuojama vandens temperatūros, druskingumo, srovių, bangų ir vandens lygio parametrus ateinančioms penkioms paroms. Modelio rezultatai skelbiami viešai: <https://hidroprognozes.ku.lt/>.

Literatūra

- [1] Idzleytė, R., Mėžinė, J., Zemlys, P. and Umgiesser, G. 2020. Study of ice cover impact on hydrodynamic processes in the Curonian Lagoon through numerical modeling. *Oceanologia*, 62(4), 428-442.
- [2] Mėžinė, J., Ferrarin, C. and Vaičiūtė, D. 2019. Sediment transport mechanisms in a lagoon with high river discharge and sediment loading. *Water*, 10(11), art. no 1970.
- [3] She, J., Markus Meier HE, Darecki M., Gorringer, P., Huess, V., Kouts, T., Reissmann, J.H. and Tuomi, L. 2020. Baltic Sea Operational Oceanography – A Stimulant for Regional Earth System Research. *Frontiers in Earth Science*, 8.
- [4] Umgiesser, G., Ferrarin, C., Bajo, M., Laurent, C., shyfem-cm, Arpaia, L., fivan, Pinsky, A., Ghezzi, M., Chagini, T., dbellafore, and jalessandri, 2024. *SHYFEM*, <https://github.com/SHYFEM-model/>, GitHub [code]
- [5] WAMDI, 1988. The WAM model - A third generation ocean wave prediction model. *Journal of Physical Oceanography*, 18, 1775–1810.

*Tyrimus finansavo Mercator Ocean International

From classification to pandemic preparedness [†]

Jūratė Šaltytė Benth

Faculty of Medicine, University of Oslo and Health Services Research Unit, Akershus
University Hospital

Recent research indicates a considerable probability that a pandemic like Covid-19, potentially resulting in over 25 million deaths, may occur within the next decade [1]. With this in mind, we have initiated a research project titled “Lessons from Pandemic”, aimed at equipping decision-makers with robust statistical tools to enhance the response strategies in future health crises. The project consists of two parts. The first part assesses the effects and timing of control measures implemented during the pandemic, as well as variations in compliance with these measures. The second part focuses on hospital capacity, analysing how resources can be optimized to meet the demands under a public health crisis, and starts with the development of a prediction model for pandemic admissions. I will present preliminary results that highlight insights gained thus far from this ongoing project involving two PhD students, Sanjay Gyawali and Lieke Fleur Heupink at Health Services Research Unit, Ahus, Norway.

References

- [1] Jamison, D. T., Summers, L. H., Chang, A. Y., et al. 2024. Global health 2050: The path to halving premature death by mid-century. *The Lancet* 404(10462):1561-614.

[†]Funded by Health Services Research Unit, Akershus University Hospital, and Helse Sør-Øst RHF (2024051)

Algebra, skaičių teorija ir geometrija

Tiesiniai nedidelio laipsnio algebrinių jungtinių skaičių sąryšiai

Žygimantas Baronėnas, Paulius Drungilas, Jonas Jankauskas

Vilniaus universitetas

Tegul $\alpha_1 := \alpha, \alpha_2, \dots, \alpha_d$ – visi algebrinio skaičiaus α algebriniai jungtiniai skaičiai virš racionaliųjų skaičių kūno $\mathbb{Q}$. Čia $d = \deg(\alpha)$ – algebrinio skaičiaus α laipsnis. Straipsnyje [1] buvo nagrinėti

$$\alpha_1 = \alpha_2 + \alpha_3 \quad \text{ir} \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \tag{1}$$

algebrinių jungtinių skaičių sąryšiai, kai $\deg(\alpha) \leq 8$. Parodyta, kad (1) lygtims sprendiniai egzistuoja tada ir tik tada, kai $d = 6$, išskyrus trivialų atvejį antrajai lygčiai, kai $d = 3$. Surastos atitinkamos tokių algebrinių skaičių minimalių polinomų virš $\mathbb{Q}$ išraiškos.

Realusis sveikasis algebrinis skaičius $\alpha > 1$ yra vadinamas *Pizo skaičiumi*, jei visi jo algebriniai jungtiniai skaičiai virš racionaliųjų skaičių kūno $\mathbb{Q}$ (išskyrus patį α) yra moduliui mažesni už 1. Straipsnyje [2] įrodyta, kad neegzistuoja toks Pizo skaičius, kurio algebriniai jungtiniai skaičiai virš $\mathbb{Q}$ tenkintų pirmąją lygtį iš (1). Taip pat parodyta, kad egzistuoja vienintelis Pizo skaičius

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{3 + 2\sqrt{5}}}{2},$$

kurio algebriniai jungtiniai virš $\mathbb{Q}$ tenkina $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_3 + \alpha_4$ sąryšį. Šis skaičius pirmiausia buvo surastas straipsnyje [3].

Toliau nagrinėjome

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \alpha_4 \quad \text{ir} \quad \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_3 + \alpha_4 \tag{2}$$

algebrinių jungtinių skaičių sąryšius, kai $d = \deg(\alpha) \leq 7$. Nustatėme, kad antroji lygtis sprendinių neturi, o pirmoji ir trečioji turi sprendinius, tik kai $d = 4$ arba $d = 6$. Taip pat suradome atitinkamas tokių algebrinių skaičių minimalių polinomų virš $\mathbb{Q}$ išraiškas. Suklasifikavome skaičių kūno $\mathbb{Q}(\alpha)$ normaliojo uždarinio Galua grupės (2) sąryšiams. Praešime pristatysime šiuos rezultatus.

Literatūra

- [1] Dubickas, A. and Jankauskas, J. 2015. Simple linear relations between conjugate algebraic numbers of low degree. *J. Ramanujan Math. Soc.* 30.2, pp. 219-235.
- [2] Dubickas, A., Hare, K. G. and Jankauskas, J. 2017. No two non-real conjugates of a Pisot number have the same imaginary part. English. *Math. Comput.* 86.304, pp. 935-950.
- [3] Dubickas, A. and Smyth, C. 2008. On the lines passing through two conjugates of a Salem number”. English. In: *Math. Proc. Camb. Philos. Soc.* 144.1, pp. 29-37.

Beurlingo dzeta funkcijos diskretusis universalumas

Andrius Geštautas

Vilniaus universitetas

Realiųjų skaičių $1 < p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_n \leq \dots$ sistema $\mathcal{P}$ su $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \infty$ vadinama apibendrintais pirminiais skaičiais. Sistema $\mathcal{P}$ generuoja apibendrintų sveikųjų skaičių sistemą $\mathcal{N}_{\mathcal{P}}$, su tam tikru $r \in \mathbb{N}$ išreiškiamų baigtine sandauga $p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$, $\alpha_j \in \mathbb{N}_0$, $j = 1, \dots, r$.

Beurlingo dzeta funkcijos $\zeta_{\mathcal{P}}(s)$ pusplokštumėje $\sigma > \sigma_0$ yra apibrėžiamos Dirichlė eilute

$$\zeta_{\mathcal{P}}(s) = \sum_{m \in \mathcal{N}_{\mathcal{P}}} \frac{1}{m^s},$$

čia σ_0 priklauso nuo sistemos $\mathcal{P}$. Beurlingo dzeta funkcijų analizinis pratęsimas yra sudėtingas. Tegul $\mathcal{N}_{\mathcal{P}}(x)$ žymi apibendrintų sveikųjų skaičių, mažesnių už x , skaičių. Jeigu

$$\mathcal{N}_{\mathcal{P}}(x) - ax = O(x^{\beta}), \quad a > 0, 0 \leq \beta < 1, \quad (1)$$

tuomet yra žinoma, kad funkcija $\zeta_{\mathcal{P}}(s)$ yra meromorfiškai pratęsiama į pusplokštumą $\sigma > \beta$, o taškas $s = 1$ yra jos paprastasis poliūs su reziduumu a .

Apibrėžkime apibendintą von Mangoldto funkciją

$$\Lambda_{\mathcal{P}}(m) = \begin{cases} \log p, & \text{jeigu } m = p^k, p \in \mathcal{P}, k \in \mathbb{N}, \\ 0, & \text{kitaip atvejais.} \end{cases}$$

Tegul $\psi_{\mathcal{P}}(x) = \sum_{m \leq x, m \in \mathcal{N}_{\mathcal{P}}} \Lambda_{\mathcal{P}}(m)$ ir $\beta_1 < 1$. Tuomet funkcijai $\psi_{\mathcal{P}}(x)$ galioja įvertis

$$\psi_{\mathcal{P}}(x) - x = O(x^{\beta_1}). \quad (2)$$

Apibrėžkime aibę $L(\mathcal{P}) = \{\log p : p \in \mathcal{P}\}$. Tegul $D = \{s \in \mathbb{C} : \hat{\sigma} < \sigma < 1\}$, čia $\hat{\sigma} < 1$ tam tikras efektyviai suskaičiuojamas realusis skaičius, $\mathcal{K}$ yra juostos D kompaktinių poaibių su jungiaisiais papildiniais klasė, $H_0(K)$, $K \in \mathcal{K}$, yra tolydžiųjų neįgyjančių nulių aibėje K ir analizinių aibės K viduje klasė, $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, o $\#A$ žymi aibės A elementų skaičių.

Teorema. [1]. *Tarkime, kad sistemai $\mathcal{P}$ galioja (1) ir (2) įverčiai, o aibė $L(\mathcal{P})$ yra tiesiškai nepriklausoma virš racionaliųjų skaičių kūno. Tegul $K \in \mathcal{K}$, o $f(s) \in H_0(K)$. Tuomet su kiekvienu $\varepsilon > 0$*

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} \# \left\{ 0 \leq k \leq N : \sup_{s \in K} |\zeta_{\mathcal{P}}(s + ikh) - f(s)| < \varepsilon \right\} > 0.$$

Be to, apatinis tankis gali būti pakeistas tankiu su visais $\varepsilon > 0$, nebent išskyrus skaičiųą $\varepsilon > 0$ reikšmių aibę.

Literatūra

- [1] Geštautas, A., Laurinčikas, A. and Šiaučiūnas, D. 2025. On discrete universality of Beurling zeta-functions. *Quaest. Math.* (pateiktas spaudai).

Analizinių funkcijų aproksimavimas periodinių dzeta funkcijų postūmiais trumpuose intervaluose

Marius Grigaliūnas

Vilniaus universitetas

Tegul $s = \sigma + it$ yra kompleksinis kintamasis, o $\mathbf{a} = \{a_m; m \in \mathbb{N}\}$ – periodinė kompleksinių skaičių seka, kurios minimalusis periodas yra $q \in \mathbb{N}$. Periodinė dzeta funkcija $\zeta(s; \mathbf{a})$ pusplokštumėje $\sigma > 1$ yra apibrėžiama Dirichlė eilute

$$\zeta(s; \mathbf{a}) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{m^s}.$$

Be to, funkcija $\zeta(s; \mathbf{a})$ turi analizinį tęsinį į visą kompleksinę plokštumą, išskyrus, gal būt, tašką $s = 1$, kuris yra šios funkcijos paprastasis polius su reziduumu $r \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{q} \sum_{m=1}^q a_m$. Jeigu $r = 0$, tuomet $\zeta(s; \mathbf{a})$ yra sveikoji funkcija.

Tegul $D = \{s \in \mathbb{C} : 1/2 < \sigma < 1\}$. Yra žinoma, žr. [1, 2, 3], kad, su tam tikromis sekomis $\mathbf{a}$, postūmiai $\zeta(s + i\tau; \mathbf{a})$, $\tau \in \mathbb{R}$, aproksimuoja plačias juostoje D apibrėžtų funkcijų klases. Kitaip tariant, yra įrodyta, kad aproksimuojančių postūmių ilgio T , $T \rightarrow \infty$, intervaluose aibė turi teigiamą apatinį tankį.

Pranešime pristatysime tam tikrą aproksimavimo postūmiais $\zeta(s + i\tau; \mathbf{a})$ atnaujinimą, t. y. nagrinėsime aproksimavimą intervale $[T, T + H]$ su $H = o(T)$, kai $T \rightarrow \infty$.

Tegul $H(D)$ žymi analizinių juostoje D funkcijų erdvę su tolygaus konvergavimo kompaktuose topologija, o $\text{meas} A$ – mažosios aibės $A \subset \mathbb{R}$ Lebego matą. Tuomet yra teisinga tokia teorema.

Teorema. *Tarkime, kad $T^{27/82} \leq H \leq T^{1/2}$. Tuomet egzistuoja tokia netuščioji uždaroji aibė $F_{\mathbf{a}} \subset H(D)$, kad su kiekviena kompaktine aibe $K \subset D$, funkcija $f(s) \in F_{\mathbf{a}}$ ir $\varepsilon > 0$*

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{H} \text{meas} \left\{ \tau \in [T, T + H] : \sup_{s \in K} |\zeta(s + i\tau; \mathbf{a}) - f(s)| < \varepsilon \right\} > 0.$$

Be to “lim inf” gali būti pakaeista “lim” su visais $\varepsilon > 0$, nebent išskyrus skaičiųą $\varepsilon > 0$ reikšmių aibę.

Literatūra

- [1] Bagchi, B. 1981. *The statistical behaviour and universality properties of the Riemann zeta-function and other allied Dirichlet series*. Ph. D. Thesis. Calcutta: Indian Stat. Institute.
- [2] Laurinčikas, A. and Šiaučiūnas, D. 2006. Remarks on the universality of the periodic zeta-function. *Math. Notes* 80(1–2):532–538.
- [3] Steuding, J. 2007. *Value-Distribution of L-Functions*. Lecture Notes Math. vol. 1877. Berlin, Heidelberg, New York: Springer.

Picturesque convolution-like recurrences

Andrius Grigutis[†] (jointly with I. Gasparavičius and J. Petkelis)

[†] Institute of Mathematics, Faculty of Mathematics and Informatics, Vilnius University

Let $\mathbf{b} = (b_0, b_1, \dots)$ be the known sequence of numbers such that $b_0 \neq 0$ and $b_0 + b_1 + \dots = 1$. During the talk, there will be discussed the methods which allow finding another sequence $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots)$ that is related to $\mathbf{b}$ as follows: $a_n = a_0 b_{n+m} + a_1 b_{n+m-1} + \dots + a_{n+m} b_0$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $m \in \mathbb{N}$.

There will be presented the connection of $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ with $a_0, a_1, \dots, a_{m-1}$ and provided varied examples of finding the sequence $\mathbf{a}$ when $\mathbf{b}$ is given as: Fibonacci geometric sequence, Leibnitz formula for π , Cantor set, normalized Catalan numbers, ratio of gamma functions, the famous Euler's identity $e^{\pi i} = -1$, etc.

It will be demonstrated that the sequences $\mathbf{a}$ may exhibit pretty patterns in the plane or space.

References

- [1] Gasparavičius, I., Grigutis, A. and Petkelis, J. Picturesque convolution-like recurrences, preprint, <https://www.overleaf.com/read/vkcrnwvcxmgf#685b13>.

Apie diskretų mišrųjų jungtinį aproksimavimą dzeta funkcijų klasėmis

Roma Kačinskaitė

Vilniaus universitetas

Mišriajame jungtiniame vienalaikiame aproksimavime nagrinėjama skirtingų tipų – užrašomų Oilerio sandauga pagal pirminius skaičius ir neužrašomų – dzeta funkcijų kuriama postūmių aibė. Uždavinys tampa sudėtingesniu, kai aproksimavimui pasirenkamos dzeta funkcijų klasės.

R. Kačinskaitė kartu K. Matsumoto (Japonija) vėliau ir L. Pankovskiu (Lenkija) eilėje darbų nagrinėjo rinkinį sudarytą iš Matsumoto dzeta funkcijų klasės ir periodinių Hurvico dzeta funkcijų (žr. [1], [2]). Pranešime pristatysime naujausius diskretaus tipo rezultatus šių funkcijų klasių rinkiniui, kai į postūmius įeina Rymano dzeta funkcijos netrivialiųjų nulių menamosios dalys.

Literatūra

- [1] Kačinskaitė, R. and Matsumoto, K. 2022. A survey of the theory of mixed joint universality for zeta-functions. *Number theory: Proceedings of the Journées Arithmétiques*, 2019, XXXI. Eds. K. Kurşungöz et al. Berlin: De Gruyter. ISBN 9783110760293 p. 47–59.
- [2] Kačinskaitė, R., Matsumoto, K. and Pańkowski, Ł. 2023. On mixed joint discrete universality for a class of zeta-functions: one more case. *Taiwanese J. Math.*, Vol. 27, Issue 2, p. 221–236.

Jungtinės ribinės teoremos Epšteino dzeta funkcijų rinkiniui

Renata Macaitienė

Vilniaus universitetas,
Šiaulių valstybinė kolegija

Tegul Q yra teigiamai apibrėžta $n \times n$ matrica ir $Q[\underline{x}] = \underline{x}^T Q \underline{x}$ su visais $\underline{x} \in \mathbb{Z}^n$. Epšteino dzeta funkcija $\zeta(s; Q)$, $s = \sigma + it \in \mathbb{C}$, apibrėžiama eilute

$$\zeta(s; Q) = \sum_{\underline{x} \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}} (Q[\underline{x}])^{-s}, \quad \sigma > \frac{n}{2}.$$

Funkcija $\zeta(s; Q)$ yra analiziškai pratęsiama į visą kompleksinę plokštumą, išskyrus paprastąjį polių taške $s = \frac{n}{2}$ su reziduumu $\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)\sqrt{\det Q}}$. Naudojant Boro–Jeseno metodą [1], išvystytą A. Laurinčiko [2], įrodyta tolydaus tipo ribinė teorema silpnąjo tikimybinių matų konvergavimo prasme Epšteino dzeta funkcijai [3]. Vėliau gauta diskretauso tipo ribinė teorema bei tam tikros apibendrintos ribinės teoremos.

Jungtinė ribinė teorema šių funkcijų rinkiniui įrodyta 2021 m. [4]. Tegul Q_j ($j = 1, \dots, r$) yra teigiamai apibrėžta $n_j \times n_j$ matrica ir $\zeta(s_j; Q_j)$ – atitinkamos Epšteino dzeta funkcijos. Pažymėkime $\underline{s} = (s_1, \dots, s_r)$, $\underline{Q} = (Q_1, \dots, Q_r)$ ir $\zeta(\underline{s}; \underline{Q}) = (\zeta(s_1; Q_1), \dots, \zeta(s_r; Q_r))$. Bendrame darbe su A. Laurinčiku įrodėme, kad

$$\frac{1}{T} \text{meas} \left\{ t \in [0, T] : \zeta(\underline{\sigma} + it; \underline{Q}) \in A \right\}, \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^r),$$

kai $T \rightarrow \infty$, silpnai konverguoja į išreikštine forma pateiktą ribinį matą. Čia $\sigma_j > \frac{n_j-1}{2}$, $\text{meas}\{A\}$ yra mačios aibės $A \subset \mathbb{R}$ Lebego matas, o $\mathcal{B}(\mathbb{C})$ – erdvės $\mathbb{C}$ Borelio aibių klasė.

Pranešime pateiksime apibendrintą rezultatą, kuomet nagrinėjamas silpnasis

$$\frac{1}{T} \text{meas} \left\{ t \in [T, 2T] : \zeta(\underline{\sigma} + i\underline{\varphi}(t); \underline{Q}) \in A \right\}, \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^r),$$

konvergavimas, kai $T \rightarrow \infty$. Čia $\underline{\varphi}(t) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_r(t))$, kur $\varphi_1(t), \dots, \varphi_r(t)$ yra tam tikros diferencijuojamos funkcijos, tenkinančios sąlygas: $\varphi_j(t) \ll t\varphi'_j(t)$ ir $\varphi'_j(t) = o(\varphi'_{j+1}(t))$, $t \rightarrow \infty$.

Literatūra

- [1] Bohr, H. and Jessen, B. 1932. Über die Wertverteilung der Riemanschen Zetafunktion, Zweite Mitteilung. *Acta Math.*, 58: 1–55.
- [2] Laurinčikas, A. 1996. *Limit Theorems for the Riemann Zeta-Function*. Kluwer, Dordrecht.
- [3] Laurinčikas, A. and Macaitienė, R. 2018. A Bohr-Jessen type theorem for the Epstein zeta-function. *Results in Math.*, 73(4): 147–163.
- [4] Laurinčikas, A. and Macaitienė, R. 2021. A Bohr-Jessen type theorem for the Epstein zeta-function. III. *Results in Math.*, 76(105): 1–12.

Loop-check free sequent calculi for unary fragment of temporal logic

Lukas Maksimiak, Adomas Birštunas

Vilnius University, Faculty of Mathematics and Informatics, Institute of Computer Science

This paper explores the construction of an efficient sequent calculus for a selected fragment of propositional linear temporal logic (*PLTL*). First, we identify a unary fragment of *PLTL* in which formulas may contain at most one outermost $\Box$ operator. Fragments are typically analyzed with the aim of defining more efficient calculi for formulas belonging to the fragment, especially when such an approach is not feasible for the full logic (such a strategy is employed in [3, 4]). We propose a newly developed sequent calculus *PLTL* – F_1 for defined fragment, which eliminates the need for loop-type axioms while improving derivation efficiency. The key of *PLTL* – F_1 is a newly developed rule:

$$(\vdash \Box_L^*) \quad \frac{\Box\Gamma \vdash B_1 \quad || \dots || \quad \Box\Gamma \vdash B_m \quad || \quad \Pi, \Box\Gamma \vdash \Sigma}{\Pi, \Box\Gamma \vdash \Sigma, \Box B_1, \dots, \Box B_m}.$$

Here, $n, m \in \mathbb{N}$, Π and Σ are sets of atomic (non-modal) formulas.

The proposed calculus *PLTL* – F_1 is proven equivalent to the traditional calculus $G_L\text{PLTL}$ (presented in [1]) within the unary fragment. While it eliminates loop-type axioms, derivation termination still requires a loop-check technique. Therefore, building on prior works [2] and proven new lemmas on restrictions for the loop-check, we introduce calculus *PLTL* – F_3 , which also employs $(\vdash \Box_L^*)$ rule and avoids loop-type axioms. However, unlike *PLTL* – F_1 , calculus *PLTL* – F_3 ensures—due to proven restrictions on the application of the $(\circ)$ rule—that no loops can arise at all. Therefore, *PLTL* – F_3 is a totally loop-check free sequent calculus for the unary fragment of *PLTL*. The calculus *PLTL* – F_1 is likewise proven equivalent to calculus $G_L\text{PLTL}$ and allows for a more efficient, loop-check free derivation procedure.

References

- [1] Alonderis, R. and Pliuškevičius, R. 2013. Sequent Systems for PLTL. In *Lithuanian Mathematical Collection*, pages 1–5, Vilnius, Lithuania: Vilnius University Press.
- [2] Birštunas, A. 2008. Restrictions for loop-check in sequent calculus for temporal logic. *Lithuanian Mathematical Journal*, 48:269–274.
- [3] Kokkinis, I. and Studer, T. 2016. Cyclic Proofs for Linear Temporal Logic. In *Concepts of Proof in Mathematics, Philosophy, and Computer Science*, pages 171–192, Berlin, Germany: De Gruyter.
- [4] R. Pliuškevičius. Loop-free verification of termination of derivation for a fragment of dynamic logic. In *Lithuanian Mathematical Collection*, pages 283–287, Vilnius, Lithuania: Vilnius University Press, 2008.

An analog of the forty-year Kubilius' inequality for permutations

Eugenijus Manstavičius, Arvydas Karbonskis

Vilnius University

Forty years ago J. Kubilius proved the following remarkable number theoretic inequality

$$\frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \left(\sum_{p|m} f(p) - \sum_{p \leq n} \frac{f(p)}{p} \right)^2 \leq \left(\frac{3}{2} + O\left(\frac{1}{\log n}\right) \right) \sum_{p \leq n} \frac{f^2(p)}{p}, \quad (1)$$

where p is a prime number, $f(p) \in \mathbb{R}$ is arbitrary, and the notation $p|m$ stands for the expression " p divides m ". The constant $3/2$ is optimal and that in the symbol $O(\cdot)$ is absolute. This is an upper estimate of the variance of sum of dependent random variables (r.vs).

Similar dependencies appear among r.vs related to drawing at random a decomposable combinatorial structure from their class. In particular, let σ be a random permutation on n points taken uniformly from the symmetric group $\mathbb{S}_n$. If $\kappa_j(\sigma)$ is the number of cycles of length j in σ , then the condition $1\kappa_1(\sigma) + \dots + n\kappa_n(\sigma) = n$ for all $\sigma \in \mathbb{S}_n$ raises the specific dependency.

Our recent achievement

$$\frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_n} \left(\sum_{j \leq n} a_j \left(\mathbf{1}\{\kappa_j(\sigma) \geq 1\} - \frac{1}{j} \right) \right)^2 \leq \left(\frac{3}{2} + O\left(\frac{1}{n}\right) \right) \sum_{j \leq n} \frac{a_j^2}{j}, \quad a_j \in \mathbb{R},$$

comparable to (1), will be presented in the talk. In particular, the methodology based upon the power eigenvalue localisation algorithm adopted in the analysis of the covariance matrix will be discussed.

Diskretusis analizinių funkcijų aproksimavimas apibendrintaisiais Lercho dzeta-funkcijos postūmiais

Toma Mikalauskaitė

Vilniaus universitetas

Tegul $s = \sigma + it$ yra kompleksinis kintamasis, o $0 < \lambda, \alpha \in (0, 1]$ yra fiksuoti parametrai. Lercho (Lerch) dzeta funkcija $L(\lambda, \alpha, s)$ pusplokštumėje $\sigma > 1$ yra apibrėžiama Dirichlė eilute $L(\lambda, \alpha, s) = \sum_{m=0}^{\infty} e^{2\pi i \lambda m} (m + \alpha)^{-s}$ ir turi analizinę tęsinį į visą kompleksinę plokštumą, išskyrus vienintelį paprastąjį polių taške $s = 1$, kai $\lambda = 1$.

Pažymėkime $U(V_0)$, $V_0 > 0$, intervale $(0, +\infty)$ apibrėžtų realiųjų funkcijų $\psi(u)$ klasę, tenkinančią reikalavimus:

1. Su kiekvienu $u \geq V_0$, funkcija $\psi(u)$ griežtai didėjanti, be to, $\psi(u) \rightarrow \infty$ kai $u \rightarrow \infty$;
2. Funkcija $\psi(u)$ turi tolydžiąją neigyančią nulių išvestinę, kad $\psi(2u) \times \max_{u \leq t \leq 2u} (\psi'(t))^{-1} \ll u$;
3. Seka $\{a\psi(k) : k \in \mathbb{N}_0\}$, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, su kiekvienu $a \neq 0$ yra tolygiai pasiskirsčiusi moduliui 1.

Tegul $H(D)$ žymi analizinių juostoje $D = \{s \in \mathbb{C} : 1/2 < \sigma < 1\}$ funkcijų erdvę su tolygaus konvergavimo kompaktuose topologija, o $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ Pranešime bus pristatyti šie rezultatai, žr. [1].

1 teorema Tarkime, kad aibė $\{\log(m + \alpha) : m \in \mathbb{N}_0\}$ yra tiesiškai nepriklausoma virš racionaliųjų skaičių kūno $\mathbb{Q}$, parametras $\lambda \in (0, 1]$ yra bet koks, o funkcija $\psi(u) \in U(V_0)$. Tegul K yra juostos D kompaktinė aibė su jungtuoju papildiniu, o funkcija $f(s)$ – tolydžioji aibėje K ir analizinė aibės K viduje. Tuomet su kiekvienu $\varepsilon > 0$

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} \# \left\{ 0 \leq k \leq N : \sup_{s \in K} |L(\lambda, \alpha, s + i\psi(k)) - f(s)| < \varepsilon \right\} > 0. \quad (1)$$

Be to “ $\liminf$ ” gali būti pakaeista “ $\lim$ ” su visais $\varepsilon > 0$, nebent išskyrus skaičiųjų $\varepsilon > 0$ reikšmių aibę.

2 teorema Tarkime, kad parametrai $\lambda, \alpha \in (0, 1)$ yra bet kokie. Tuomet egzistuoja tokia netuščioji aibė $\mathcal{F}_{\lambda, \alpha, h} \subset D$, kad su kiekviena kompaktine aibe $K \subset D$, funkcija $f(s) \in \mathcal{F}_{\lambda, \alpha, h}$ ir $\varepsilon > 0$ galioja (1) nelygybė. Be to “ $\liminf$ ” gali būti pakaeista “ $\lim$ ” su visais $\varepsilon > 0$, nebent išskyrus skaičiųjų $\varepsilon > 0$ reikšmių aibę.

References

- [1] Laurinčikas, A. Mikalauskaitė, T. and Šiaučiūnas, D. 2025. Approximation of analytic functions by generalized discrete shifts of the Lerch zeta-function. *Lith. Math. J* (priimtas spaudai).

Hurvico dzeta funkcijos diskretusis universalumas trumpuose intervaluose

Darius Šiaučiūnas

Vilniaus universitetas

Tegul $s = \sigma + it$ yra kompleksinis kintamasis, o $0 < \alpha \leq 1$ – fiksuotas parametras. Hurvico dzeta funkcija $\zeta(s, \alpha)$ pusplokštumėje $\sigma > 1$ yra apibrėžiama Dirichlė eilute

$$\zeta(s, \alpha) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m + \alpha)^s}$$

ir yra analiziškai pratęsiama į visą kompleksinę plokštumą, išskyrus paprąją polių taške $s = 1$.

Pranešime bus pristatytas funkcijos $\zeta(s, \alpha)$ diskretusis universalumas trumpuose intervaluose. Tegul $D = \{s \in \mathbb{C} : 1/2 < \sigma < 1\}$,

$$L(\alpha, h, \pi) = \left\{ (\log(m + \alpha) : m \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}), \frac{2\pi}{h} \right\}, \quad h > 0,$$

$\mathcal{K}$ yra juostos D komapktinių poaibių su jungiaisiais papildiniais klasė, $H(K)$, $K \in \mathcal{K}$, aibėje K tolydžiųjų ir analizinių aibės K viduje funkcijų klasė, $N \in \mathbb{N}_0$, o $\#A$ žymi aibės A elementų skaičių. Yra įrodytos tokios teoremos, žr. [1].

1 teorema. Tegul $L(\alpha, h, \pi)$ yra tiesiškai nepriklausoma virš racionaliųjų skaičių kūno, o $h^{-1}(Nh)^{27/82} \leq H \leq h^{-1}(Nh)^{1/2}$. Tuomet su kiekvienu $K \in \mathcal{K}$, $f(s) \in H(K)$ ir $\varepsilon > 0$

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} \# \left\{ 0 \leq k \leq N \sup_{s \in K} |\zeta(s + ikh, \alpha) - f(s)| < \varepsilon \right\} > 0. \quad (1)$$

Be to, apatinė riba gali būti pakeista riba su visais $\varepsilon > 0$, nebent išskyrus skaičių $\varepsilon > 0$ reikšmių aibę.

Kita teorema rodo, kad funkcija $\zeta(s, \alpha)$ išlaiko geras aproksimavimo savybes ir su visais parametrais α . Tegul $H(D)$ yra analizinių juostoje D funkcijų erdvė su tolygaus konvergavimo kompaktuose topologija.

2 teorema. Tarkime, kad $0 < \alpha < 1$, $\alpha \neq 1/2$, ir $h > 0$ yra bet kokie, o $h^{-1}(Nh)^{27/82} \leq H \leq (Nh)^{1/2}h^{-1}$. Tuomet egzistuoja tokia netuščioji uždaroji aibė $\mathcal{F}_{\alpha, h} \subset H(D)$, kad su kiekviena kompaktine aibe $K \subset D$, $f(s) \in \mathcal{F}_{\alpha, h}$ ir $\varepsilon > 0$ galioja (1) nelygybė. Be to, (1) nelygybėje apatinė riba gali būti pakeista riba su visais $\varepsilon > 0$, nebent išskyrus skaičių $\varepsilon > 0$ reikšmių aibę.

References

- [1] Laurinčikas, A. and Šiaučiūnas, D. 2025. Approximation of analytic functions by discrete shifts of the Hurwitz zeta-function in short intervals. *Math. Slovaca* (pateiktas spaudai).

Kai kurių dzeta funkcijų reikšmių pasiskirstymas

Raivydas Šimėnas

Vilniaus universitetas

Tarkime, duota funkcija $f : A \rightarrow B$ ir fiksuotas $a \in B$. Funkcijos f a -taškai yra tokie $s \in A$, kad $f(s) = a$. Mūsų atveju, $A = B = \mathbb{C}$. Mano pristatymo tema yra Lercho ir Selbergo dzeta funkcijų a -taškų pasiskirstymas kompleksinėje plokštumoje. Lercho dzeta funkcija yra Rymano dzeta funkcijos apibendrinimas. Selbergo dzeta funkcija pasirodo įvairiuose skaičių teorijos kontekstuose, pvz., pirminių geodezių teoremoje.

Apie diskretų Selbergo-Štoidingo klasės jungtinį reikšmių pasiskirstymą

Benjaminas Togobickij, Roma Kačinskaitė

Vilniaus universitetas

Viena iš analizinėje skaičių teorijoje nagrinėjamų dzeta funkcijų klasių yra Selbergo-Štoidingo klasė $\tilde{S}$, kurią apibrėžė A. Selbergas [2], o vėliau papildė J. Štoidingas [3]. Priminsime, kad šią klasę sudaro L funkcijos apibrėžiamos Dirichlé eilute bei tenkinančios tokias aksiomatines sąlygas, kaip Ramanudžano hipotezę koeficientams, turi analizinį pratęsimą, tenkina funkcinę lygtį, egzistuoja Oilerio bei galioja pirminių skaičių teoremos analogas.

Tegul $0 < \gamma_1 < \dots \leq \gamma_k \leq \gamma_{k+1} \leq \dots$ yra Rymano dzeta funkcijos $\zeta(s)$ netrivialiųjų nulių menamųjų dalių seka, kuriai teisinga modifikuota Montgomerio hipotezė apie porų koreliaciją [1]. Pranešime kalbėsime apie $\tilde{S}$ klasės jungtinį diskretų reikšmių pasiskirstymą, kai postūmiai yra siejami su γ_k , t. y. konstruojama seka $\{h_j \gamma_k\}$, $h_j > 0$, $h_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, r$. Be jau aukščiau išvardintų sąlygų svarbų vaidmenį šiame pasiskirstymo tyrime atlieka multiaibės $\{(h_j \log p : p \in \mathbb{P}), j = 1, \dots, r; 2\pi\}$ elementų tiesinis nepriklausomumas virš $\mathbb{Q}$.

Literatūra

- [1] Garunkštis R., Laurinčikas A. and Macaitienė R. 2017. Zeros of the Riemann zeta-function and its universality. *Acta Arithmetica*, Vol. 181, pp. 127–142.
- [2] Selberg A. 1992. Old and new conjectures and results about a class of Dirichlet series. In: Proc. of the Amalfi Conf. on Analytic Number Theory, held at Maiori, Amalfi, Italy, 25–29 September, 1989. E. Bombieri et al. (eds.), Salerno: University di Salerno. pp. 367–385.
- [3] Steuding J. 2007. Value-Distribution of L -Functions, Lecture Notes Math. Vol. 1877. Berlin: Springer.

Developments in the Cage Problem [‡]

James Tuite

Klaipėda University, Lithuania & Open University, UK

The Cage Problem is one of the central topics of extremal combinatorics and has applications in the design of efficient networks for parallel computing. The problem consists of finding the smallest possible order of a d -regular graph with given girth. A survey can be found in [2].

Little progress has been made on this problem in the last decade. In this talk I will show how we found new record graphs for the degree/girth problem for cubic graphs via the degree/girth problem for hypergraphs [1]. I will also survey some recent developments on the problem, including generalisations of the problem to networks including directed connections [3].

References

- [1] Erskine, G. and Tuite, J. 2023. Small graphs and hypergraphs of given degree and girth. *Electronic Journal of Combinatorics*, 30:#P1.57.
- [2] Exoo, G. and Jajcay, R. 2012. Dynamic cage survey. *Electronic Journal of Combinatorics*, DS16-Jul.
- [3] Tuite, J. and Erskine, G. 2022. On networks with order close to the Moore bound. *Graphs and Combinatorics*, 38:143.

[‡]This research was partly funded by a London Mathematical Society Early Career Fellowship (grant ECF-2021-27) and EPSRC grant EP/W522338/1

Diferencialinės lygtys ir skaičiavimo metodai

Antrosios eilės tikslumo diskrečiojo Šturmo ir Liuvilio uždavinio su dvitaške nelokaliąją sąlyga spektro tyrimas

Ugnius Alekna[†], Kristina Bingelė[‡], Artūras Štikonas[†]

[†] Vilniaus universitetas, Taikomosios matematikos institutas

[‡] Vilnius TECH universitetas, Matematinio modeliavimo katedra

Pranešime nagrinėjama baigtinių skirtumų schema Šturmo ir Liuvilio uždaviniui su klasikine kraštine sąlyga [1]:

$$-u'' = \lambda u, \quad t \in (0, 1), \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad (1)$$

$$u(0) = 0 \quad \text{arba} \quad u'(0) = 0, \quad (2)$$

ir antra dvitaške nelokaliąją kraštine sąlyga

$$u(1) = \gamma u'(\xi) \quad \text{arba} \quad u'(1) = \gamma u(\xi), \quad (3)$$

$\gamma \in \mathbb{R}$ ir $\xi \in [0, 1]$. Nagrinėjami nelokaliųjų kraštinių sąlygų atvejai, kurie neaprašyti straipsnyje [2].

Diferencialinį uždavinį (1)–(3) aproksimuojame skirtuminių lygčių sistema:

$$-\delta^2 U = \lambda U, \quad t \in \omega^h, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

$$U_0 = 0 \quad \text{arba} \quad (\bar{\delta}U)_0 = 0,$$

$$U_n = \gamma(\bar{\delta}U)_m \quad \text{arba} \quad (\bar{\delta}U)_n = \gamma U_m,$$

$\xi = m/n$ sutampa su tinklo $\bar{\omega}^h$ tašku. Tiek lygtis, tiek kraštinės sąlygos aproksimuojamos antrosios eilės tikslumu.

Pranešime pristatomi rezultatai apie diskrečiojo uždavinio spektrą, gauti kai išvestinė kraštinėse sąlygose pakeičiama natūraliąja jos aproksimacija $\bar{\delta}$ [2, 3].

Literatūra

- [1] Bingelė, K., Bankauskienė, A. and Štikonas, A. 2020. Investigation of spectrum for a Sturm–Liouville problem with with two-point nonlocal boundary conditions. *Math. Model. Anal.*, 25 (1):53–70.
- [2] Bingelė, K. and Štikonas, A. 2024. Investigation of a Discrete Sturm–Liouville problem with Two-Point Nonlocal Boundary Condition and Natural Approximation of a Derivative in Boundary Condition. *Math. Model. Anal.*, 29 (2):309–330.
- [3] Samarskii, A.A. and Nikolaev, E.S. 1989. *Numerical Methods for Grid Equations*. Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Berlin, (Vol. I, *Iterative Methods*; Vol. II, *Direct Methods*).

Maišymo YAG sintezėje analizė: srities dydžio ir modelio dimensijos įtaka

Rokas Astrauskas, Arnas Vaicekauskas, Vytenis Šumskas

Vilniaus universitetas

Darbe modeliuojame itrio aliuminio granato (YAG) sintezę reakcijos–difuzijos lygčių sistema dvimatėje srityje:

$$\begin{aligned}\frac{\partial c_1}{\partial t} &= D_1 \left(\frac{\partial^2 c_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_1}{\partial y^2} \right) - 3kc_1c_2, \\ \frac{\partial c_2}{\partial t} &= D_2 \left(\frac{\partial^2 c_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_2}{\partial y^2} \right) - 5kc_1c_2, \\ \frac{\partial c_3}{\partial t} &= D_3 \left(\frac{\partial^2 c_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_3}{\partial y^2} \right) + 2kc_1c_2,\end{aligned} \quad (x, y, t) \in \Omega \times (0, T),$$

kur $c_i(x, y, t)$ – ieškomų medžiagų koncentracijos, T – sintezės trukmė, $\Omega = (0, a) \times (0, a)$ – modeliavimo sritis, kurioje yra keturios dalelės, a – dalelės dydis. Naudojame Noimano kraštines sąlygas, reiškiančias simetriją ir leidžiančias visą reakciją modeliuoti mažoje srityje Ω :

$$\left. \frac{\partial c_i}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\partial \Omega} = 0.$$

Pradinės sąlygos ir kiti parametrai plačiau aprašyti ankstesniuose darbuose [1].

Uždavinys sprendžiamas skaitiškai baigtinių skirtumų metodu naudojant 2 schemas – išreikštinę ir kintamų krypčių neišreikštinę (ADI). Nagrinėjame šių metodų tikslumą ir greitaveiką, tinkamumą spręsti didelės apimties uždavinį bei lyginame su trimačio modelio rezultatais.

Realioje YAG sintezės procese atliekamas maišymas – tam tikru metu reakcija stabdoma ir reagentai mechaniškai maišomi sukeičiant dalelių vietas ir tarpusavio padėtį. Šį procesą modeliuojame 2 būdais: idealiu maišymu, kai srityje Ω dalelės sukeičiamos optimaliai perstumiant jas įstrižai, ir atsitiktiniu maišymu, kai kiekviena dalelė pastumiama ir pasukama atsitiktinai.

Pasinaudodami šiais modeliais, tiriamo, kaip pagreitinama sintezė, kaip šis pagreitinimas priklauso nuo to, ar skaičiuojama dvimatėje ar trimatėje srityje. Galiausiai, parodome, kaip sintezės sparta ir maišymo efektyvumas priklauso nuo modeliavimo srities dydžio didindami modeliuojamų dalelių kiekį.

Literatūra

- [1] Mackevičius, M., Ivanauskas, F., Kareiva, A. and Jasaitis, D. 2012. A closer look at the computer modelling and sintering optimization in the preparation of YAG. *J. Math. Chem.* 50:2291–2302.

Baigtinių skirtumų schema dvimačiai Puasono lygčiai su integraline kraštine sąlyga

Abdalaziz Bakhit, Olga Štikonienė, Artūras Štikonas

Vilniaus universitetas Taikomosios matematikos institutas

Nagrinėjame dvimatę Puasono lygtį su nelokaliaja kraštine sąlyga, aprašoma dvilypiu integralu:

$$L(u) := -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2, \quad (1)$$

$$u(x, y) = \int_{\Omega} k(x, y, \xi, \eta) u(\xi, \eta) d\xi d\eta + g(x, y), \quad (x, y) \in \partial\Omega, \quad (2)$$

čia $\Omega := \Omega_x \times \Omega_y$, $\Omega_x := \{x: 0 < x < a\}$, $\Omega_y := \{y: 0 < y < b\}$ [1]. Tarsime, kad branduolys k tenkina sąlygą $\int_{\Omega} |k(x, y, \xi, \eta)| d\xi d\eta \leq \varrho < 1$. Baigtinių skirtumų metodas tiesinei dvimatei parabolinei lygčiai su kraštine sąlyga (2) srityje $\Omega = [0, 1]^2$ buvo nagrinėtas [1].

Užrašykime baigtinių skirtumų schemą uždaviniui (1)–(2):

$$\begin{aligned} L^h(U) &:= -\delta_x^2 U - \delta_y^2 U = F, \quad (x_i, y_j) \in \omega^h, \\ U_{ij} &= [K_{ij}, U]^{\text{tr}} + G_{ij}, \quad (x_i, y_j) \in \partial\bar{\omega}^h, \end{aligned}$$

ir integralo aproksimacijai kraštinėje sąlygoje naudosime dvimatę trapecijos formulę $[K_{ij}, U]^{\text{tr}}$, čia $K_{ij}^{lm} = k(x_i, y_j, x_l, y_m)$, $(x_i, y_j) \in \partial\bar{\omega}^h$, $(x_l, y_m) \in \bar{\omega}^h$. Tarime, kad

$$\max_{x_{ij} \in \partial\bar{\omega}^h} [|K_{ij}|, 1]^{\text{tr}} \leq \rho < 1.$$

Pagrindinis šio uždavinio ypatumas yra tas, kad neklasikiniu atveju negalime naudoti kintamųjų atskyrimo metodo ir skaidyti dvimačio uždavinio į vienmačius. Darbo tikslas buvo sukonstruoti efektyvų sprendimo metodą, ir pagrįsti jo korektiškumą.

Literatūra

- [1] Lin, Y., Xu, S. and Yin, H.-M. 1997. Finite difference approximation for a class of non-local parabolic equations. *Internat. J. Math. & Math. Sci.* 20(1):147–163.
- [2] Wang, Y. 2002. Solutions to nonlinear elliptic equations with a nonlocal boundary condition. *Electron. J. Differential Equations* 2002(05):1–16.

Modeling of Inhomogeneous Characteristics of a Piezoelectric Ceramic Rod in the Region of a Dielectrically Isolated Section of an Electrode Coating Using Low-Frequency Tomography

Maryna Iurchenko

Klaipeda University, Lithuania

This work addresses an inverse boundary value problem of the vibration theory of slender piezoceramic elements with local mechanical inhomogeneities. Specifically, we investigate the reconstruction of elastic inhomogeneities in a piezoceramic rod undergoing longitudinal vibrations. The inhomogeneity arises from a dielectrically isolated region lacking electrode coverage, which alters the rod's mechanical properties. Using the method of low-frequency tomography, we analyze and reconstruct the inhomogeneity based on experimentally measured resonance frequencies. A theoretical framework is presented involving the one-dimensional differential equations for a thickness-polarized piezoceramic rod and the associated equations of motion and electrostatics. The system considers harmonic voltage excitation under specific boundary conditions and derives the stress and displacement fields for segmented regions of the rod. The inverse problem is approached by approximating the inhomogeneity in the elastic modulus using a truncated Fourier series with unknown coefficients. These coefficients are determined by solving a system of equations derived from matching the calculated and measured resonance frequencies. Six resonance modes were experimentally measured under two configurations: fully covered and partially segmented electrodes. The numerical solution demonstrates strong agreement between theoretical predictions and experimental data, validating the feasibility of using low-frequency vibration modes for the spatial reconstruction of mechanical inhomogeneities. This confirms that low-frequency tomography can effectively detect and characterize local defects or design features in piezoceramic rods when sufficient spectral data is available.

Determination of contact force in AFM indentation experiments

Nikolajus Kozulinas[†], Rokas Astrauskas[†], Inga Morkvėnaitė-Vilkončienė[‡], Liasvidas Striška[‡]

[†] Faculty of Mathematics and Informatics, Vilnius University

[‡] Department of Electrical Engineering, Vilnius Gediminas Technical University

Atomic force microscopy (AFM) indentation experiments are widely used to measure the properties of yeast, plant, and animal cells. In these experiments, a cantilever tip applies a controlled force to the cell surface, allowing to study the cell's elasticity, stiffness, and viscoelastic behavior. Accurate determination of contact force is crucial because animal cells are soft, heterogeneous, and often show complex mechanical responses. Specialized models, such as the Hertz or Sneddon models, are typically used to interpret the indentation data. However, these models are only applicable when the contact between the cantilever tip and the cell is shallow. In this talk, an alternative approach will be presented, where the behavior is described not by the Hertz model but by the Mooney–Rivlin hyperelastic model with a deep indentation of different types of cantilever tips.

Dvimatės netiesinės parabolinės lygties su nelokaliois kraštinėmis sąlygomis skirtuminės schemos stabilumas ir konvergavimas

Kristina Pupalaigė[†], Mifodijus Sapagovas[‡], Jurijus Novickij[‡]

[†] Department of Applied Mathematics, Kaunas University of Technology

[‡] Institute of Data Science and Digital Technologies, Vilnius University

Sudaromas baigtinių skirtumų metodas netiesinei dvimatei parabolinei lygčiai

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f(u) + p(x, y, t) \quad (1)$$

stačiakampėje srityje, kur $(x, y) \in \Omega = \{0 < x < 1, 0 < y < 1\}$ ir $t \in (0, T]$ su nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis

$$u(1, y, t) = \gamma u(0, y, t), \quad (2)$$

$$\frac{\partial u(1, y, t)}{\partial x} = 0, \quad (3)$$

bei su Dirichle tipo nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis

$$u(x, 0, t) = \mu_1(x, t), \quad (4)$$

$$u(x, 1, t) = \mu_2(x, t) \quad (5)$$

ir su pradine sąlyga

$$u(x, y, 0) = \phi(x, y). \quad (6)$$

Skirtumo operatoriaus spektro struktūrai analizuoti naudojama M-matricų teorija. Taisant šią metodiką, įrodomas skirtuminės schemos stabilumas ir konvergavimas. Pateikiame keletą naujų išvadų.

Literatūra

- [1] Bingelė, K. and Štikonas, A. 2024. Investigation of a discrete Sturm–Liouville problem with two-point nonlocal boundary condition and natural approximation of a derivative in boundary condition. *Mathematical Modelling and Analysis* 29:(2), 309–330.
- [2] Sapagovas, M., Novickij, J. and Pupalaigė, K. 2025. On stability and convergence of difference schemes for one class of parabolic equations with nonlocal condition. *Nonlinear Analysis: Modelling and Control*, 30(1):135–155.

Mechaninio maišymo modeliavimas YAG sintezėje

Vytenis Šumskas, Rokas Astrauskas

Vilniaus Universitetas, Matematikos ir Informatikos Fakultetas

Šiame pranešime pateikiamas itrio aliuminio granato $Y_3Al_5O_{12}$ gamybos cheminės reakcijos matematinis modelis, pagrįstas [1, 2, 3, 4] darbuose gautais rezultatais. Modelis papildytas reaktoriaus maišymo skaitmeniniais eksperimentais, atliktais siekiant optimizuoti reakcijos išeigą išmaišymo laiko atžvilgiu.

Maišymo modelyje klasikiniai skaitiniai metodai apjungiami su tikimybių teorijos matematiniais įrankiais. Siekiant sukurti tikroviško išmaišymo simuliacijas, išbandyti įvairūs modeliavimo būdai. Pasirinktas Monte-Carlo simuliacijų metodas, jo pagalba atlikti keli šimtai skaitmeninių eksperimentų ir gauti duomenys apibendrinti. Tokiu būdu apytiksliai įvertintas vidutinis optimalaus išmaišymo momentas, taip pat vidutinis reakcijos pagreitis, naudojant vieną arba du išmaišymus.

Pranešime glaustai primenamas nestacionaraus reakcijos-difuzijos modelio sudarymas. Aptariamą pasiteisinę ir nepasiteisinę maišymo modeliavimo būdai, kilę iššūkiai, taip pat jų įtaka tyrimo išvadoms ir galimos metodo modifikacijos ateities darbuose.

Literatūra

- [1] Dabulytė-Bagdonavičienė, J. Nečiporenko, A. Ivanauskas, F. and Kareiva, A. 2022. Influence of different diffusion rates of reaction reagents on the synthesis of yttrium aluminium garnet (YAG). *J Math Chem* 60:172–183.
- [2] Ivanauskas, F. Kareiva, A. and Lapcun, B. 2009. Computational modelling of the YAG synthesis. *J Math Chem* 46:427–442.
- [3] Ivanauskas, F. Kareiva, A. and Lapcun, B. 2015. On the modelling of solid state reactions. Synthesis of YAG. *J Math Chem* 37:365–376.
- [4] Mackevičius, M., Ivanauskas, F., Kareiva, A. and Jasaitis, D. 2012. A closer look at the computer modelling and sintering optimization in the preparation of YAG. *J Math Chem* 50:2291–2302.

Matematikos istorija ir didaktika

Iš VU Matematikos ir informatikos fakulteto naujausios istorijos: studentų priėmimo į matematines specialybes raida (1991-2024 m.m.)

Igoris Belovas

Vilniaus universitetas

Apžvelgiama, remiantis pirminių šaltinių duomenimis, studentų priėmimo į Vilniaus universiteto Matematikos fakulteto (1991-1998 m.m.) bei Matematikos ir informatikos fakulteto (1999-2024 m.m.) pagrindinių studijų matematines specialybes raida.

Pedagogical Content Knowledge, Mathematical Flexibility, and Teaching Self-Efficacy of Preservice Mathematics Teachers in the Czech Republic, Germany, Lithuania, Poland, and Slovakia: a Comparative Study

Monika Grigaliūnienė[†], Sylvia Gabel[‡], Mirosława Sajka[§], Ingrid Semanišínová[¶],
Petra Konečná^{||}, Jon Star^{**}, Erno Lehtinen^{††}

[†] Vilniaus Didžiojo universitetas [‡] Universität Augsburg, Vokietija [§] Uniwersytet
Komisji Edukacji Narodowej w Krakowie, Lenkija
[¶] University of Pavol Jozef Šafárik, Slovakia ^{||} University of Ostrava, Čekija ^{**}
Harvard University, JAV ^{††} Vilniaus Didžiojo universitetas, University of Turku,
Suomija

This study investigates the level of mathematics knowledge related to teaching effectiveness among preservice teachers before they begin formal training. It explores the relationships between various components of their mathematical knowledge for teaching, its connection to teaching self-efficacy, and cross-country differences among participants from Lithuania, Poland, the Czech Republic, Slovakia, and Germany. Grounded in scientific realism, the study surveys first-semester university students in mathematics teacher education programs using a validated and pilot-tested questionnaire focused on pedagogical content knowledge, mathematical flexibility, and self-efficacy. The survey was conducted online with country specific translations to ensure clarity. Data analysis shows notable differences between preservice teachers of different countries.

References

- [1] Güler, M. and Çelik, D. 2019. How well prepared are the teachers of tomorrow? An examination of prospective mathematics teachers' pedagogical content knowledge. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 50(1), 82—99.
- [2] Hill, H. C., Ball, D. L. and Schilling, S. G. 2008. Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 372—400.
- [3] Oonk., W., Verloop, N., and Gravemeijer, K. P. E. 2015. Enriching practical knowledge: Exploring student teachers' competence in integrating theory and practice of mathematics teaching. *Journal for Research in Mathematics Education*, 46(5), 559—598.
- [4] Shulman, L. S. 1986. Those who understand: Knowledge growth in teaching, *Educational Researcher*, 15, 4—14.

Motyvacijos mokytis matematiką sąsajų su savijauta matematikos pamokose ir su matematikos pritaikomumo suvokimu tyrimas

Ieva Ilickienė, Rūta Juozaitienė, Sigita Urbonienė

Vytauto Didžiojo universitetas

Pastarąjį dešimtmetį vis dažniau kalbama apie mokytojų, ypač matematikos srities specialistų, trūkumą. LAMA BPO 2024 metų stojimų ataskaita rodo, kad tik 1,74 proc. abiturientų pasirinko matematikos studijas. 2024 metais tik 909 mokiniai nusprendė studijuoti matematiką, gamtos mokslus ar statistiką [3]. Išanalizavus mokslinę literatūrą nustatyta, kad motyvacija yra vienas svarbiausių veiksnių, turinčių įtakos mokinių pasiekimams matematikoje [1, 2]. Atsižvelgiant į situaciją Lietuvoje – menką mokinių susidomėjimą matematika ir nenorą sieti savo ateities su šia sritimi keliama problema: kokie veiksniai lemia mokinių motyvaciją mokytis matematikos? Tyrimui taikyti šie duomenų analizės metodai: faktorių analizė, koreliacinė analizė, neparametriniai testai (*Mann – Whitney U*, *Kruskal – Wallis*) ir regresinė analizė. Atlikus tyrimą tarp 11–12 klasių Lietuvos mokinių paaiškėjo, kad jų motyvaciją labiausiai veikia savijauta matematikos pamokose ir šio dalyko pritaikomumo supratimas. Regresinės analizės rezultatai parodė, kad mokinių motyvacija turi sąsajų su lytimi, turimu pažymiu ir suvokimu, kaip dažnai matematika pritaikoma praktikoje. Atsižvelgus į pastarąjį pastebėjimą, buvo analizuojama, kiek dėmesio praktinio turinio užduotims skiriama skirtinguose matematikos vadovėliuose. Lyginant „Matematika Tau plius“ ir „Tempus“ vadovėlius pagal praktinio pobūdžio užduočių skaičių, nustatytas statistiškai reikšmingas skirtumas, tačiau lyginant kitus lietuviškus vadovėlius tarpusavyje – reikšmingų skirtumų neaptikta. Palyginus lietuviškus vadovėlius su Tarptautinio bakalaureato programos vadovėliais, nustatyta, kad pastarieji pasižymi ženkliai didesne užduočių, orientuotų į matematikos taikymus, gausa.

Literatūra

- [1] Alipour, M., Aminifar, E., Geary, D. C. and Ebrahimpour, R. 2023. Framing mathematical content in evolutionarily salient contexts improves students' learning motivation. *Learning Motivation*, vol. 82, p. 101894.
- [2] Eccles, J. S. and Wigfield, A. 2020. From expectancy-value theory to situated expectancy-value theory: A developmental, social cognitive, and sociocultural perspective on motivation. *Contemporary Education Psychology*, vol. 61, p. 101859.
- [3] LAMA BPO, „2024 m. bendrojo priėmimo į Lietuvos aukštąsias mokyklas apžvalga“, 2024.

Jaunųjų matematikų varžybų komandinių ir individualių rezultatų palyginimas

Karolina Kanišauskienė

Vilniaus universitetas

Tyrimo tikslas – palyginti 2022–2025 m. vykusių Jaunųjų matematikų varžybų 11/12 kl. moksleivių komandinius ir individualius rezultatus.

Dešimtainė skaičiavimo sistema: kaip išmokti tai, ką gerai mokam?

Ieva Kilienė

Vilniaus universitetas, Matematikos ir informatikos fakultetas, Taikomosios matematikos institutas

Nestandartinis pozicinės skaičiavimo sistemos pateikimas mokiniams ir mokytojams. Dešimtainė skaičiavimo sistema yra įprasta naudoti nuo pat vaikystės, todėl ji tapusi tiek natūrali, kad sunku atsiriboti nuo jos, tam, kad suprastume algoritmų atliekant veiksmus prasme. Tam pasitelksime nestandartinį skaičiavimo sistemos pateikimą. Taip pat bus aptariami problemos ir užduoties skirtumai mokyklinėje matematikoje.

Įdomios plokštumos kreivės

Edmundas Mazėtis[†], Grigorii Melnichenko[‡]

[†] Matematikos institutas, Vilniaus universitetas

[‡] Švietimo akademija, Vytauto Didžiojo universitetas

Kreivės sąvoka buvo intuityviai suprata dar gilioje senovėje. Stebėdami mesto akmens trajektoriją, upės krantų išlinkimus, augalų ir gėlių lapų kontūrus, žmonės palaipsniui vystė kreivės sąvokos sampratą. Straipsnyje bandoma aptarti tokias kreives, kurios privertė matematikus giliau pažvelgti į kreivės sąvoką ir rimčiau užsiimti kreivių savybių nagrinėjimu. Visų pirma tai kreivės, kurios sutinkamos kasdieniniame gyvenime, nors dažnai to ir nepastebime. Autoriai mano, kad straipsnyje išdėstytos mintys padės matematikos mokytojams paskatinti mokinius rimčiau domėtis labai įdomiu mokslu – matematika.

Netaisyklingos matematikos pavyzdžiai lietuviškuose vadovėliuose

Rimas Norvaiša

Vilniaus universitetas, Matematinio švietimo centras

Pranešime aptariami įvairių tipų netaisyklingos matematikos atvejai vadovėliuose. Pavyzdžiui, vietoje matematinės sąvokos apibrėžties vadovėliuose aiškinami matematiniai simboliai ir terminai. Kitais atvejais, pagrindžiant ar įrodant teiginius naudojami klaidingi ar netrivialūs faktai taip, lyg būtų savaime suprantami. Pateikiame ir loginio samprotavimo klaidų pavyzdžių. Didelę dalį netaisyklingumo vadovėliuose atvejų paaiškiname matematikos programos problemišku. Kita dalis netaisyklingumo kyla dėl tų pačių temų skirtingo traktavimo skirtinguose vadovėliuose. Visais aptariamais atvejais siūlome alternatyvius taisyklingus sprendimus.

Trumpas pagrindinės algebros teoremos įrodymas

Aivaras Novikas, Juozas Juvencijus Mačys

Vilniaus universitetas

Mokykloje mokiniai gali būti supažindinami ne tik su tokiais teiginiais kaip pagrindinė algebros teorema, bet ir jų įrodymais. Ši garsi teorema turi įvairių įrodymų, o jos įrodymai – įvairių modifikacijų [1, 2]. Pranešime aptarsime vieną iš galimų pagrindinės algebros teoremos įrodymų, kurio idėjos gali būti prieinamos ir mokiniams.

Literatūra

- [1] Mačys, J. J. 2022. Pagrindinė algebros teorema. *Liet. matem. rink., Ser. B* 63:47–53.
- [2] Novikas, A. and Mačys, J. J. 2024. On an elementary proof of the fundamental theorem of algebra. *Lith. Math. J.* 64(4):507–513.

Mokyklinės matematikos programos kritika

Robertas Vilkas

Vilniaus Vytauto Didžiojo gimnazija

Matematikos istorija ir didaktika

Mokyklinės matematikos vadovėliai turi daug trūkumų, tačiau nemaža dalis šių trūkumų yra pasekmė netinkamos matematikos programos. Šiuo metu galiojančioje matematikos programoje [1] yra visa eilė trūkumų. Kai kuriuos iš jų pabandysime aptarti.

1. Kodėl operacijos tarp aibių yra nukeltos net į 11 klasę? Juk, pagal programą, reiškinio apibrėžimo sritis yra 9 klasėje, tačiau pvz. reiškinio $\frac{1}{x}$ apibrėžimo sritis yra aibių sąjunga $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ arba skirtumas $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, t. y. bet kuriuo atveju reikia turėti aibių operacijas. Šio netobulumo pasekmė yra ta, kad naujausiuose vadovėliuose dabar yra **matematinė klaida**, nes atsakymas pateikiamas taip: $(-\infty; 0)$, $(0; \infty)$ (čia dvi aibės, o turėtų būti viena). Yra ir daugiau priežasčių, pvz.: iracionaliųjų skaičių aibė $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, nelygybės $x^2 > 4$ sprendinių aibė. Bet problema yra žymiai didesnė, negu atrodo, nes mokytojas negali pateikti pvz. aibių sąjungos devintokams, nes tuomet jis gali būti apkaltintas, kad dirba ne pagal programą (pvz. mokinių tėvų).
2. Ar logiška, kad 9 klasėje yra *bendrosios* skaičių sekos (netgi Fibonačio seka paminėta programoje), o 11 klasėje yra *paprasciausios* skaičių sekos (t. y. aritmetinė ir geometrinė progresijos). Ar neturėtų būti atvirkščiai?
3. Ar logiška, kad net apie 20% viso 1-12 klasių matematikos programos teksto yra skirta vienai temai? Jau nekalbant apie tai, kad šią "ypatingą" temą ne visi priskiria matematikai.
4. Naujesnėje programoje algebros gerokai sumažėjo, nors pagrindinės mokinių spragos yra būtent algebroje. Šiemet per PUPP buvo uždavinys, kuriame reikėjo suprastinti reiškinį $\frac{4}{x^2-2x} - \frac{x}{x-2}$. Ištaisius 58 mokinių darbus, rezultatas yra toks: 28 mokiniai surinko 0 taškų iš 3 taškų. Tai reiškia, kad apie 48% dešimtokų nesugebėjo net subendravardiklinti trupmenų.
5. Mokykliniuose vadovėliuose kai kurie terminai yra netinkami [2], tačiau net ir pačioje programoje galima rasti terminą *rinkiniai*, nors turėtų būti *junginiai* (universitetiniuose vadovėliuose naudojamas terminas *junginiai*, bet yra ir daugiau priežasčių, kodėl šis terminas yra tinkamesnis [2]).

Literatūra

- [1] Matematikos programa:
<https://emokykla.lt/bendrosios-programos/visos-bendrosios-programos/5>
- [2] Vilkas, R. (2023) Mokyklinės matematikos terminų ir žymenų kritika, *Lietuvos matematikos rinkinys*, 64(B), pp. 87–97. doi:10.15388/LMD.2023.33599.

Matematikos taikymai

Informacijos moksliniame straipsnyje paieška panaudojant diskretaus laiko Markovo grandines

Mindaugas Bražėnas, Eimutis Valakevičius

Kauno Technologijos Universitetas, Matematinio Modeliavimo Katedra

Greitam susipažinimui su moksliniu straipsniu pakanka perskaityti jo santrauką, išvadas. Siekiant geriau susipažinti su išdėstyta medžiaga – perskaitomas visas straipsnis, pieštuku ant popieriaus atkartojami autoriaus atlikti žingsneliai, realizuojami algoritmai, atliekami skaičiavimai su pavyzdžiais. Mūsų kuriama metodika – tai dar vienas būdas geriau įsisavinti straipsnio medžiagą bei esant poreikiui greitai identifikuoti sakinius atspindinčius autoriaus nuomonę specifiniais klausimais. Metodiką sudaro trys dalys: įvestis, analizė ir išvestis.

Visa straipsnio medžiaga suvedama į tekstinį failą laikantis specifinio formato. Formatu pateikta informacija įgalina: (1) generuoti *Latex'o* failą (*PDF* failo generavimui); (2) nesunkiai identifikuoti struktūros elementus: skyrius, pastraipas, sakinius.

Paprasta paieška, kuomet nustatomi sakiniai turintys pateiktus raktinius žodžius turi šiuos trūkumus: (1) pasirenkami sakiniai kuriais nusakoma ta pati mintis; (2) praleidžiami susiję sakiniai, neturintys raktinių žodžių. Problemos sprendimui nagrinėjame būdą, kurį sudaro du etapai: sakinių svarbumo įvertinimas atsisžvelgiant į jų tarpusavio panašumą/susietumą ir labiausiai reprezentatyvių sakinių identifikavimas. Sakinių svarbumo matas (*LexRank*) įvertinamas skaičiuojant diskretaus laiko Markovo grandinės būsenų (t.y. sakinių) stacionarias tikimybes pagal aprašytą būdą straipsnyje [1]. Toliau, nustatytiems svarbiausiems sakiniams formuluojame ir sprendžiame aibės padengimo uždavinį [2] – taip išskirdami sakinių poaibį, kuris geriausiai paaikšina ("padengia") svarbiausius sakinius. Klausimas kurį sprendžiame – kaip panaudoti duotus raktinius žodžius šiuose etapuose (siekiant glaustai išgauti norimą informaciją)?

Analizės etape nustatytus sakinius išvedame sugeneruodami *PDF* failą. Išbandome išvesties variantus: (1) išvedami tik pasirinkti sakiniai; (2) išvedamas visas straipsnio tekstas su pažymėtais pasirinktais sakiniiais. Gamtos mokslų (matematikos, fizikos, ir kt.) moksliniuose straipsniuose gausiai pateikiamos formulės (grafikai ir pan.). Todėl, yra aktualu išvesti ir papildomus sakinius, kuriuose pateikiamos formules yra minimos pasirinktuose sakiniuose.

Konferencijos pranešime detaliau aptarsime paminėtus mokslinio straipsnio analizės etapus, juos pritaikysime vieno/dviejų mokslinių straipsnių analizei.

Literatūra

- [1] Erkan, G. and Radev, D.R. 2024. Lexrank: Graph-based lexical centrality as salience in text summarization. *Journal of Artificial Intelligence Research*, 22:457-479, December 2004.
- [2] Wang, L., Hu, S., Li, M. and Zhou, J. 2019. An exact algorithm for minimum vertex cover problem. *Mathematics*, 7(7).

Optimization of Underground Hydrogen Storage in Deep Saline Aquifers: A Reservoir Simulation Approach

Shankar Lal Dangi, Mayur Pal

Department of Mathematical Modeling, Kaunas University of Technology

The global energy sector is undergoing a fundamental transformation toward sustainability, driven by the need to mitigate climate change, reduce dependence on fossil fuels, and address rising energy costs. In this context, hydrogen (H_2) has emerged as a clean and versatile energy carrier with the potential to decarbonize multiple sectors. However, one of the major technical challenges to its widespread adoption is the development of large-scale, efficient, and safe storage systems. Among the available options, Underground Hydrogen Storage (UHS) in geological formations—such as salt caverns, depleted hydrocarbon reservoirs, and deep saline aquifers—offers a promising solution to balance seasonal demand-supply variations and support energy system flexibility.

This study focuses on the optimization of UHS efficiency in deep saline aquifers, as a representative case. Emphasis is placed on both geological viability and operational performance to determine how best to enhance storage capacity and minimize gas losses. A mechanistic 3D reservoir model was developed using tNavigator (v24.2), incorporating detailed petrophysical properties—such as porosity (16%), permeability (400 mD), and net-to-gross ratio (0.75)—to simulate realistic reservoir conditions.

An extensive suite of simulations was conducted to evaluate and optimize various parameters, including injection and production strategies, well setups, and levels of geological heterogeneity. Both homogeneous and heterogeneous reservoir models were tested to reflect the impact of subsurface variability. Results showed that injecting hydrogen into the lower reservoir layers and producing from the upper layers significantly reduced gas losses and water production. The optimal injection rate was identified as 1.2 million Sm^3/day , balancing storage efficiency with operational feasibility.

These findings demonstrate that strategic optimization of well placement, injection cycles, and reservoir characterization can substantially improve the performance of hydrogen storage in saline aquifers. The proposed modeling framework offers practical insights for designing scalable underground hydrogen storage systems, particularly in where deep saline formations are prevalent. This work contributes to advancing the technical readiness of UHS as a cornerstone of future hydrogen infrastructure.

Complexity of Coding and Non-coding Regions in Genetic Code

Kamilija Jablonskaitė, Mantas Landauskas

Department of mathematical modelling, Faculty of mathematics and natural sciences,
Kaunas university of technology

DNA encodes genetic information of all living organisms. It is structurally composed of just four basic pairs called nucleotides (thymine, adenine, cytosine, and guanine – T, A, C and G in short) connected by sugar phosphate backbone – that in turn code for amino acids. Nucleotide sequence mathematically can be considered as a numerical one – and based on different physicochemical properties can be coded in various different ways.

While the sequence could seem to be random at first glance, it is entirely not true – parts of it belong to genes that code for proteins, while other segments are called non-coding (for genes). Longer and more complex genes belong to more complex organisms (biologically) and vice versa; however, non-coding parts of the whole sequence tend to be longer for more complex organisms too [1]. Thus, one might raise a hypothesis about certain segments of a non-coding sequence being of higher biological importance.

The aim of this study is to mathematically assess the complexity of the genetic code in coding and non-coding regions in human DNA. Discrepancies of these complexities are identified. Permutation entropy (PE) is employed for this task. It can be computed as:

$$PE = -\frac{1}{\ln(m!)} \sum_{i=1}^{m!} p(\pi_i) \ln(p(\pi_i)),$$

where m is the length of the permutation and $p(\pi_i)$ is its corresponding probability to be observed in the data. PE has a range of applications to genetic code [2].

References

- [1] Field, D. and Wills, C. 1996. Long, polymorphic microsatellites in simple organisms. Proceedings of the Royal Society of London. Series B: Biological Sciences, 263(1367), 209-215.
- [2] Sun, X., Zou, Y., Nikiforova, V., Kurths, J. and Walther, D. 2010. The complexity of gene expression dynamics revealed by permutation entropy. BMC bioinformatics, 11, 1-15.

Apmokymo su klaidomis uždavinys multiplikacinėse nekomutuojančiose grupėse

Aleksejus Michalkovič, Lina Dindienė, Eligijus Sakalauskas

Kauno Technologijos universitetas

Pranešime yra nagrinėjamas apmokymo su klaidomis (angl. Learning with errors) uždavinys. Siūloma šį uždavinį pritaikyti multiplikacinėms nekomutuojančioms grupėms remiantis vienvuse matricinio laipsnio funkcija. Darbe demonstruojama, kaip pritaikyti gautą uždavinį vienam bitui šifruoti. Nagrinėjamas siūlomo šifravimo protokolo saugumas.

Literatūra

- [1] Regev, O. 2005. On lattices, learning with errors, random linear codes, and cryptography. *Proceedings of the Thirty-Seventh Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, STOC 2005. Association for Computing Machinery, New York, USA, pp. 84–93, May 22–24. doi.org/10.1145/1060590.1060603
- [2] Grundman, H. and Smith, T. 1996. Automatic realizability of Galois groups of order 16. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 124(9), pp. 2631–2640. <https://doi.org/10.1090/S0002-9939-96-03345-X>
- [3] Sakalauskas, E. and Luksys, K. 2012. Matrix power function and its application to block cipher s-box construction. *International Journal of Innovative Computing, Information and Control*, 8(4), pp. 2655–2664.

Laiko vėlinimų optimizavimo algoritmas laiko eilučių rekonstravimo uždavinyje

Kristina Poškuvienė, Inga Telksnienė, Minvydas Kazys Ragulskis

Kauno Technologijos universitetas

Laiko eilučių analizė netiesiniais metodais gana aktualus uždavinys įvairiuose taikymų ir skaitinės analizės uždaviniuose. Yra daugybė metodų, kurie analizuoja laiko eilutes fazinėse erdvėse išskiriant dinaminių sistemų būsenas. Laiko eilučių rekonstravimo į fazinę erdvę gerumas taip pat gali būti matuojamas analizuojant jos geometrines ir topologines savybes. Šiame pranešime mes pateikiame gana paprastą algoritmą laiko eilutė rekonstravimui į daugiamatę erdvę naudojant optimalų laiko vėlinimų rinkinį. Rekonstravimo uždavinys yra sprendžiamas pateikiant labai paprastą optimizavimo algoritmą, kuriame randamas geriausias nebūtinai tolygus laiko vėlinimų rinkinys daugiamatėje erdvėje. Darbe taip pat pademonstruojama kaip rekonstruoto atraktoriaus geometrinės savybės gali būti panaudotos analizuojant laiko eilučių sinchronizaciją. Tyrime pateikiami eksperimentai su chaotinių atraktorių pavyzdžiais.

Literatūra

- [1] Takens, A. 1981. Detecting strange attractors in turbulence. *Dynamical Systems and Turbulence*, Warwick 1980, vol. 1980 of Lecture Notes in Mathematics, Springer. pp. 366-381.
- [2] Ragulskis, M. and Lukoševičiūtė, K. 2009. Non-uniform attractor embedding for time series forecasting by fuzzy inference systems, *Neurocomputing*, vol. 72, no 10-12, pp. 2618-2626.
- [3] Timofejeva, I., Poškuvienė, K., Maosen, C. and Ragulskis M. 2018. Synchronization Measure Based on Geometric Approach to Attractor Embedding Using Finite Observation Windows, Wiley, Hindawi, *Complexity*, vol. 2018.

Estimation of Remaining Useful Life of Bearings Using Hankel Matrices[§]

Paulina Sabanskytė, Mantas Landauskas

Department of mathematical modelling, Faculty of mathematics and natural sciences,
Kaunas university of technology

In the study we have investigated the possible estimation of the remaining useful life (RUL) of bearings using the algebraic structure of a Hankel matrix. Often, various machine learning algorithms are available for RUL assessment, for example, [2, 3]. In contrast, algebraic techniques in predictive diagnostics have been much less researched. Our aim is to address this gap.

By exploring the acceleration measurements of the bearing with respect to the vertical axis (obtained from the scientific experimentation platform PRONOSTIA [1]), we have taken a fixed sliding window and formed the corresponding Hankel matrices. Next, the computation of the singular values of the Hankel matrices formed by using SVD decomposition was done. The differences of two adjacent singular values were computed in order to assess the change in significance of the sorted singular value. Then by incorporating the significance threshold, we have estimated the pseudo-rank of the Hankel matrix. We use it as the predictor of RUL.

Analysis shows that the correlation between the pseudo-rank and remaining useful life could be seen when there was about 5 to 10 % of RUL left. Finally, we have constructed and trained an Artificial Neural Network (ANN) with a single input, pseudo-rank of a Hankel matrix, and an output representing the RUL.

References

- [1] Nectoux, P., Gouriveau, R., Medjaher, K., Ramasso, E., Chebel-Morello, B. and Zerhouni, N. 2012. PRONOSTIA: An experimental platform for bearings accelerated degradation tests, 1-8.
- [2] Li, X., Ding, Q., and Sun, J. Q. 2018. Remaining useful life estimation in prognostics using deep convolution neural networks. *Reliability Engineering & System Safety*, 172, 1-11.
- [3] Guo, L., Li, N., Jia, F., Lei, Y. and Lin, J. 2017. A recurrent neural network based health indicator for remaining useful life prediction of bearings. *Neurocomputing*, 240, 98-109.

[§]Research was supported by the Research Council of Lithuania. Project No S-ST-24-22

Patobulinto matricinio laipsnio funkcija paremto blokinio šifro taikymas skaitmeniniams vaizdams šifruoti

Jokūbas Žitkevičius, Aleksejus Michalkovič

Kauno Technologijos universitetas

Pranešime yra nagrinėjamas tobulo saugumo blokinis šifras paremtas matricinio laipsnio funkcija. Šifras yra taikomas vaizdams šifruoti elektroninio bloknoto ir blokų grandinės režimais. Darbe siūlomas papildomas vaizdavimas statistinėms savybėms pagerinti. Tyrimų rezultatai palyginami su AES šifru dviem režimais.

Literatūra

- [1] Pardede, A.M.H., et al. Retraction: Digital Image Security Application with Arnold Cat Map (ACM) (J. Phys.: Conf. Ser. 1114 012059). *Journal of Physics. Conference Series*, Dec 7, 2018, vol. 1114, no. 1. pp. 12152. Available from: <https://www.proquest.com/docview/2565488334> CrossRef. ISSN 1742-6588. DOI 10.1088/1742-6596/1114/1/012152.
- [2] Dindiene, L., Mihalkovich, A., Luksys, K. and Sakalauskas, E. Matrix Power Function Based Block Cipher Operating in CBC Mode. *Mathematics 2022*, vol. 10, no. 12, 2123. Available from: <https://doi.org/10.3390/math10122123>.

Statistika ir jos taikymai

Saulės elektrinių veikimo analizė

Emilija Bareikaitė, Aušrinė Budzevičiūtė, Rūta Levulienė

Vilniaus universitetas

Atsižvelgiant į spartų elektros energijos vartojimo augimą ir būtinybę pereiti prie tvarių energijos šaltinių, patikimas saulės elektrinių veikimas tampa ypač svarbus. Buvo analizuoti realūs saulės elektrinės duomenys, siekiant suprasti, kokie veiksniai daro įtaką sistemos darbui. Pagrindinis dėmesys skiriamas įspėjimų (anomalijų) atsiradimui ir jų sąsajoms su įvairiais parametrais. Buvo ištirta kurie požymiai yra reikšmingi ir gali lemti sistemos įspėjimų atsiradimą. Taip pat sukurti faktoriai, kurie panaudoti modeliuojant ir siekiant prognozuoti įspėjimą. Šis tyrimas prisideda prie efektyvesnio atsinaujinančios energijos šaltinių – saulės elektrinių – valdymo, ir padeda užtikrinti jų patikimą veikimą ilgalaikėje perspektyvoje.

Changed segment tests via norm and Brownian projection

Karolis Bartkus, Alfredas Račkauskas

Vilnius University

We address epidemic change-point detection problem without parametric assumptions.

We propose statistics, based on Cramér-von Mises type statistic and RKHS, that iterate through all interval subsets, rescaling it to remain sensitive to both short and long epidemics.

We prove limit theorems and provide quantiles for both statistics under the different parametrizations. The simulations show consistent power across a wide range of scenarios, and an application to electricity balancing prices consistently detects a market disturbance.

References

- [1] Račkauskas, A. and Wendler, M. 2020. Convergence of U-processes in Hölder spaces with application to robust detection of a changed segment. *Stat Papers* 61:1409–1435.
- [2] Račkauskas, A. and Suquet, C. 2007. Estimating a changed segment in a sample. *Acta Applicandae Mathematicae* 97(1–3):189–210.

Change-Point Detection in Functional First-Order Auto-Regressive Models

Algimantas Birbilas, Alfredas Račkauskas

Vilniaus universitetas

A sample of continuous random functions with auto-regressive structures and possible change-point of the means are considered.

We present test statistics for the change-point based on a functional of partial sums. To study their asymptotic behavior, we prove functional limit theorems for polygonal line processes in the space of continuous functions.

For some situations, we use a block bootstrap procedure to construct the critical region and provide applications. We also study the finite sample behavior via simulations.

Eventually, we apply the statistics to a telecommunications data sample.

References

- [1] Birbilas, A. and Račkauskas, A. 2024. Change-Point Detection in Functional First-Order Auto-Regressive Models. *Mathematics*, 12, 1889. <https://doi.org/10.3390/math12121889>

Time Series Cointegration Literature Study[¶]

Urtė Deinoravičiūtė[†], Jurgita Markevičiūtė[†], Povilas Treigys[‡]

[†] Institute of Applied Mathematics, Vilnius University

[‡] Institute of Data Science and Digital Technologies, Vilnius University

This study presents a comprehensive analysis of scholarly literature on co-integration and its applications in time series analysis. Using a dataset of over 2,700 articles published since the year 2000, the analysis revealed a steady increase in publication volume, although the relative frequency of the term "co-integration" in finance-related articles' abstracts slightly declined. Topic modeling via Latent Dirichlet Allocation (LDA) identified several prevalent themes, primarily in finance, economics, and ecology. A temporal examination of these topics showed a notable rise in articles related to economics and the emergence of machine learning themes over time. Geographical trends highlighted that while the United States leads across all topics, countries such as China, Germany, and Turkey exhibited focus in specific areas. Frequently referenced terms, including "FDI" and "CO2", identified using NER (named entity recognition) confirmed the strong presence of co-integration concept in finance and environmental literature. Additionally, zero-shot classification was applied to assess the disciplinary alignment of the articles.

[¶]Publication / Research is funded by Research Council of Lithuania under the Programme "University Excellence Initiatives" of the Ministry of Education, Science and Sports of the Republic of Lithuania (Measure No. 12-001-01-01-01 "Improving the Research and Study Environment"). Project No.: S-A-UEI-23-11

Spatial supervised classification based on continuous Hidden Semi-Markov Model via LISA indexes

Kęstutis Dučinskas, Marta Karaliutė

Klaipėdos universitetas

In this article, we develop a generative approach to supervised classification of the discrete time spatial data via the Hidden Semi-Markov models with continuous emissions. This study is an extension of the previous investigations that relied on the Hidden Markov Models with Gaussian emissions. This choice is motivated by studying flexible models with continuous emissions. The objective of this study is to extend the previous investigations that relied on the particular Hidden Markov Models with Gaussian observations to the specific type of Hidden Semi-Markov models with continuous emissions specified at a fixed number of spatial sites. The proposed approach comprises two step strategies for estimating Hidden Semi-Markov model parameters. In the first step, all Hidden Semi-Markov model parameters are separately estimated by the Baum-Welch algorithm from supervised data at each site. In the second step, these local estimators are used in the construction of three hybrid estimators differing in the rules of incorporating the spatial context in the considered problem. Those hybrid estimators are induced by three popular local spatial association indexes from class LISA. These hybrid estimators are plugged into the Bayes discriminant function and used for one-step ahead classification of particular continuous observations. Classifiers, based on several strategies for model parameters estimation, with different degrees of overlap between the emission densities and various sojourn distributions, are studied and compared by performance measures derived from spatially aggregated confusion matrices. The proposed methodology is illustrated for simulated graphical data by the implementation of the software package *mhsmm* from the computing system R.

References

- [1] Dučinskas, K., Karaliutė, M., Šaltytė-Vaisiauskė, L. 2023. Spatially weighted Bayesian classification of spatio-temporal areal data based on Gaussian-Hidden Markov Models. *Mathematics*, Vol. 11, Iss. 2, Art. No. 347, p. 1 - 13, ISSN 2227-7390. doi:10.3390/math11020347

Keli ekologinių duomenų rinkimo pavyzdžiai

Rimantas Eidukevičius

Vilniaus universitetas

Ekologiniai duomenys – tai informacija apie ekosistemas, gyvūnų rūšis ir aplinkos sąlygas. Tokie duomenys gali būti panaudoti ir metinėse ataskaitose, ir moksliniuose tyrimuose. Todėl duomenų rinkimas detalai planuojamas ir vykdomas atsižvelgiant į įvairius reikalavimus. Pranešime bus pavyzdžiai apie rinktus duomenis įvairiose šalyse, miškuose ir koralų rife.

Functional Data Analysis of Biomedical Near-Infrared Spectroscopy Signals

Miglė Gervytė, Tadas Žvirblis

Vilnius University, Faculty of Mathematics and Informatics

This study applies Functional Data Analysis (FDA) to biomedical Near-Infrared Spectroscopy (NIRS) signals to explore differences between preterm newborns with and without Patent Ductus Arteriosus (PDA), a condition common in preterm infants. The analysis focuses on three signals: blood oxygenation (SpO_2), cerebral oxygenation ($\text{rSO}_2\text{-1}$), and renal oxygenation ($\text{rSO}_2\text{-2}$), across three newborn groups: without PDA (no-PDA), with haemodynamically insignificant PDA (PDA), and with haemodynamically significant PDA (hsPDA). While NIRS is widely used in medicine, its research, featuring statistical analysis, has been limited. In this work, FDA methods, including data smoothing, functional exploratory data analysis, hypothesis testing, and classification using functional Support Vector Machines (SVM), k-Nearest Neighbors (KNN), and Random Forest (RF) are applied to identify group patterns, find differences and evaluate classification accuracy. Results show that $\text{rSO}_2\text{-1}$ and $\text{rSO}_2\text{-2}$ signals reveal distinct patterns, with the hsPDA group standing out in $\text{rSO}_2\text{-1}$ and the no-PDA group in $\text{rSO}_2\text{-2}$. Functional classification of $\text{rSO}_2\text{-2}$ signals highlights FDA's potential, with functional SVM achieving the highest performance (accuracy, precision, recall, and F-scores around 66%). Functional KNN and RF classifiers show comparable overall accuracy (62–63%), though KNN performance varies notably between groups, while RF demonstrates more balanced results. These findings demonstrate the value of FDA in improving statistical analysis of biomedical NIRS signals and support its use in future research.

References

- [1] Barati, Z., Zakeri, I. and Pourrezaei, K. 2013. Functional data analysis view of functional near infrared spectroscopy data. *Journal of Biomedical Optics* 18.11:117007–117007.
- [2] Ramsay, J. and Silverman, B. 2005. Functional Data Analysis. *Springer Series in Statistics*. Springer.
- [3] Ullah, S. and Finch, C. F. 2013. Applications of functional data analysis: a systematic review. *BMC Medical Research Methodology* 13:1–12.
- [4] Zhang, J. 2014. Analysis of variance for functional data. *Monographs on Statistics and Applied Probability* 127:127.
- [5] Wang, J.-L., Chiou, J.-M. and Müller, H.-G. 2016. Functional data analysis. *Annual Review of Statistics and Its Application* 3.1:257–295.

Tikimybių teorijos ir matematinės statistikos taikymai kokybės gerinimui gamybos įmonėse

Rasa Grigolienė, Jolanta Janutėnienė, Giedrė Vainorė

Klaipėdos universitetas

Gamybos produktų kokybės užtikrinimas yra esminė kokybės valdymo proceso dalis [2], padedanti užtikrinti produktų atitiktį nustatytiems standartams, klientų lūkesčiams bei teisiniams reikalavimams. Ši sritis apima įvairius metodus, įrankius ir procesus. Dažnu atveju gaminių kokybės parametrai yra išmatuojami, todėl atliekami įvairūs matavimai ir testavimas ar kaupiami duomenys išmaniosiomis sistemomis [3]. Kai matavimų skaičius yra didelis, galima pasitelkti tikimybių teorijos ir statistikos metodus, norint nustatyti gaminių neatitikimo standartams (broko) tikimybę [4]. Tam pirmiausia nustatomas sukaupytų matavimo ar stebėsenos duomenų pasiskirstymas pagal tikimybinis skirstinius (normalusis, lognormalusis, Veibulo ar kt.) [1]. Lyginant šias reikšmes su techninėse specifikacijose nurodytais reikalavimais gaminių kokybei bei įvertinus galimas tolerancijas, galima nustatyti gamybos broko tikimybę. Taikant minėtą metodiką, pranešime pristatomos įvairių atvejų analizės iš gamybos įmonių.

Literatūra

- [1] Alashaari, G. A. A. and Alshammari, F. S. 2021. The Role of Probability Distributions in Establishing Acceptance Sampling Plans and Quality Control Charts. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education*, 12(6): 1989–2000.
- [2] Pacana, A. and Siwec, D. 2021. Universal Model to Support the Quality Improvement of Industrial Products. *Materials*, 14(24): 7872. DOI: 10.3390/ma14247872
- [3] Psarommatis, F., Prouvost, S., May, G., Kiritsis, D. 2020. Product Quality Improvement Policies in Industry 4.0: Characteristics, Enabling Factors, Barriers, and Evolution Toward Zero Defect Manufacturing. *Front. Comput. Sci.* 2:26. DOI: 10.3389/fcomp.2020.00026
- [4] Yu, H. 2022. Application Strategy of Probability Theory and Mathematical Statistics in Big Data Analysis. *Proceedings of the 2022 7th International Conference on Social Sciences and Economic Development (ICSSSED 2022)*: 2100-2103. DOI: 10.2991/aebmr.k.220405.353

Vilniaus universiteto fakultetų XXI a. priėmimo rodiklių analizė ir prognozavimas

Martynas Jokubaitis, Igoris Belovas

Vilniaus universitetas

Lietuvos universitetų studentų skaičius, iki 2022 metų smarkiai mažėjęs, pastaraisiais metais ne tik stabilizavosi, bet ir rodo augimo tendencijas. Tokioje sparčiai ir netikėtai besikeičiančioje aplinkoje ypač svarbu gebėti prisitaikyti prie naujų sąlygų. Priėmimo prognozės padeda ne tik stebėti stojimo dinamiką, bet ir priimti strategiškai pagrįstus sprendimus dėl resursų paskirstymo, mokymo bei mokymosi kokybės gerinimo.

Šiame darbe analizuojami Vilniaus universiteto bendrieji ir atskirų fakultetų priėmimo rodikliai XXI amžiaus pirmąjį ketvirtį. Duomenų analizei ir prognozėms taikomi ARIMA bei neryškių laiko eilučių modeliai. Pasitelkus koreliacinę analizę, siekiama įvertinti demografinių veiksnių įtaką ir nustatyti, ar jų poveikis priėmimo rezultatams yra statistiškai reikšmingas.

An approach to generative supervised classification of discrete time spatial data via Gamma Hidden Markov Models

Marta Karaliutė, Kęstutis Dučinskas

Klaipėdos universitetas

We develop the generative approach to supervised classification of the discrete-time spatial data via the Hidden Markov model with emissions following Gamma distributions. The objective of this study is to extend the previous investigations that relied on the particular Hidden Markov model with Gaussian observations to the specific type of Hidden Markov model with continuous nonnegative positively skewed emissions specified at a fixed number of spatial sites. The proposed approach comprises two-step strategies for the estimation of Hidden Markov model parameters. In the first step, all Hidden Markov model parameters are separately estimated by the Baum-Welch algorithm from supervised data at each site. In the second step, these local estimators are used to construct four hybrid estimators differing in the rules of incorporating spatial context in the considered problem. One estimation rule is based on a spatial weighting of local model estimators. The next three hybrid estimators are induced by three popular local spatial association indexes from class LISA.

These hybrid estimators are plugged into the Bayes discriminant function and used for one-step ahead classification of observation at all sites. Performances of the proposed classifiers are evaluated by the accuracy rate derived from spatially aggregated confusion matrices. Motivated by the desire to investigate the scenarios with different class separation levels evaluated by overlapping of Gamma emission densities estimated by Kullback-Leibler divergence. The numerical analysis of the simulated and real data is carried out. The empirical study is conducted to compare the performances of classifiers based on different parameter estimation strategies and various class separation levels between emission distributions. The results of this study can aid in the design of the various generative classification techniques of the positive with right skewness data relied on particular discrete time of spatial Hidden Markov models.

References

- [1] Karaliutė, M. and Dučinskas, K. 2023. Performance of the supervised generative classifiers of spatio-temporal areal data using various spatial autocorrelation indexes. *Non-linear analysis: modelling and control*, vol. 28, no. 2, p. 250-263.
- [2] Dučinskas, K., Karaliutė, M. and Šaltytė-Vaisiauskė, L. 2023. Spatially weighted Bayesian classification of spatio-temporal areal data based on Gaussian-Hidden Markov Models. *Mathematics*, Vol. 11, Iss. 2, Art. No. 347, p. 1 – 13.

Lietuviškų tekstų skiemenų statistika

Gediminas Murauskas, Marijus Radavičius

Vilniaus universitetas, Taikomosios matematikos institutas

Žinoma, kad konkretaus skiemens vartoseną priklauso nuo jo vietos žodyje [1, 3]. Vieni skiemenys dažnesni žodžių pradžioje, kiti – žodžio gale. Skiemenų vartoseną taip pat priklauso ir nuo skiemens sampratos (apibrėžimo). Įvairių skiemenavimo teorijų taikymas lietuvių kalbai nagrinėjamas Kazlauskienės monografijoje [2].

Šiame tyrime taikoma universalus ir adaptyvus skiemenavimo metodo, trumpai aprašyto straipsnyje [4], patobulinta versija. Naudojant didelio kiekio retų įvykių modeliavimo [5, 6] ir kitus statistinius metodus tirama, kaip skiemens vartoseną lietuviškuose tekstuose yra susijusi su jo paprastomis fonetinėmis savybėmis ir gramatinėmis ypatybėmis (pavyzdžiui, balsių-priebalsių struktūra, sąsaja su tam tikru linksniu, priesaga ar priešdėliu) bei bendromis kiekybinėmis žodžio charakteristikomis (pavyzdžiui, žodžio ilgiu, jo skiemenų kiekiu).

References

- [1] Karosienė, V. ir Girdenis, A. 2001. Statistinė fonemų distribucija lietuvių bendrinės kalbos pradiniuose, vidiniuose ir galiniuose skiemenyse. *Baltistica* 36(2):153-266.
- [2] Kazlauskienė, A. 2023. *Bendrinės lietuvių kalbos skiemo*. Kaunas: Vytauto Didžiojo universitetas.
- [3] Kazlauskienė, A. ir Raškinis, G. 2008. Lietuvių kalbos fonologinio skiemens struktūrinių modelių dažnumas. *Žmogus ir žodis: mokslo darbai. Didaktinė lingvistika* 10(1):24-31.
- [4] Murauskas, G. ir Radavičius, M. 2022. Skiemenų statistikos taikymas atskiriant poeziją nuo prozos. *Lietuvos statistikos darbai* 61:32-45.
- [5] Piaseckienė, K. and Radavičius, M. 2014. Empirical Bayes estimators of structural distribution of words in Lithuanian texts. *Nonlinear analysis : modelling and control* 19(4):611-625.
- [6] Radavičius, M. 2020. A consistent estimator of structural distribution. *Austrian journal of statistics: Special Issue CDAM 2019* 49(4):99-105.

Neatsakymų įtaka populiacijos parametrų vertinimui asimetriniuose duomenyse: metodų palyginimas

Vilma Nekrašaitė-Liegė

Vilniaus Gedimino technikos universitetas,
Valstybės duomenų agentūra

Tyrime analizuojama neatsakymų įtaka populiacijos parametrų įvertinimui esant asimetriniam duomenų pasiskirstymui. Lyginami įvairūs metodai, taikomi šiai problemai spręsti, įskaitant skirtingų tipų neatsakymų situacijas. Dėmesys skiriamas neatsakymų vertinimo būdams imčių teorijos kontekste. Tyrimui pasitelkti Valstybės duomenų agentūros duomenys.

Tikimybių teorija ir jos taikymai

Asimptotika daugiamatėje Le Cam teoremoje

Vydas Čekanavičius[†], Simona Jokubauskienė[‡]

[†] Vilniaus universitetas

[‡] Vilniaus Didžiojo universitetas

Geriausio įmanomo be galo dalijamo aproksimavimo bet kuriai nepriklausomų atsitiktinių kintamųjų sumai problemą (Kolmogorovo problemą) vienmačiu atveju išsprendė Arakas. Tačiau apie daugiamatę Kolmogorovo problemos versiją žinoma labai mažai.

Bendriausias šiuo metu žinomas daugiamatis rezultatas yra Le Cam's [1] teoremos analogas, įrodytas by Presman [2], kuris teigia, kad bet kokių nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių vektorių suma gali būti aproksimuota sudėtinio Puasono skirstiniu (lydinčių vektorių suma), o aproksimacijos tikslumas yra neblogesnis, nei $C(d)n^{-1/3}$. Čia $C(d)$ yra absoliutinė konstanta, priklausanči tik nuo erdvės matavimo d , o n yra vektorių skaičius.

Mes sukonstruojame asimptotinį skleidinį Le Cam teoremoje, leidžiantį pagerinti aproksimacijos tikslumą iki $C(d, s)n^{-(s+1)/(2s+3)}$. Pažymėtina, kad nedaroma jokia prielaida apie baigtinių momentų egzistavimą ar vektorių skirstinių struktūrą. Vienintelė priemonė yra tinkamas pradinio skirstinio postūmis.

Literatūra

- [1] Le Cam, L. 1965. On the distribution of sums of independent random variables. In: Neyman, J., Le Cam, L.M. (eds) Bernoulli 1713 Bayes 1763 Laplace 1813. Springer, Berlin, Heidelberg (1965).
- [2] Presman, E.L. 1974. On a multidimensional version of the Kolmogorov uniform limit theorem. Teor. Veroyatn. Primen. 18(2), 396–402 (1973) (Russian). Transl.: Theory Probab. Appl. 18(2), 378–384. <https://doi.org/10.1137/1118046>

Haezendonck-Goovaerts rizikos mato asimptotika skirstinių su nuosaikiai kintančiomis uodegomis sumoms

Mantas Dirma, Neda Nakliuda, Jonas Šiaulys

Vilniaus universitetas

Sakykime, $\xi_1, \dots, \xi_n$, $n \in \mathbb{N}$ yra galimai priklausomi ir nebūtinai vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai (a.d.s), priklausantys sunkiauodegių, nuosaikiai kintančias uodegas turinčių skirstinių reguliarumo klasei $\mathcal{C}$. Praktiniuose finansų ar draudimo srities tikimybose tokie a.d.s ir jų sumos, kurias žymėsime $S_n^{(\epsilon)}$, gali atspindėti investuotojo ar draudimo bendrovės galimų nuostolių dydį. Tokiame kontekste, prisiimamos rizikos lygį įvertinti padeda rizikos matai – atvaizdžiai, atsitiktinius dydžius atvaizduojantys į realiųjų skaičių aibę. Pranešimo metu bus kalbama apie vieną iš jų – vadinamąjį Haezendonck-Goovaerts (HG) rizikos matą (pirmą kartą pristatytą 1982 m. [1]), kuris yra apibrėžiamas naudojant neneigiamą ir iškilą intervale $[0; \infty)$ Young'o funkciją φ . Atveju, kai funkcija φ yra laipsninė su rodikliu $\alpha \geq 1$ (t.y., $\varphi(t) = t^\alpha$), o pasiklovimo lygmuo artėja į 1, bus nagrinėjama HG rizikos mato asimptotika sumoms $S_n^{(\epsilon)}$. Gauti rezultatai papildo [2] ir [3] darbus.

Literatūra

- [1] Haezendonck, J. and Goovaerts, M.J. 1982. A new premium calculation principle based on Orlitz norms, *Insur. Math. Econ.*, **1**:41–53.
- [2] Tang, Q. and Yang, F. 2012. On the Haezendonck-Goovaerts risk measure for extreme risks, *Insur. Math. Econ.*, **50**:217–227.
- [3] Tang, Q. and Yang, F. 2014. Extreme value analysis of the Haezendonck-Goovaerts risk measure with a general Young function, *Insur. Math. Econ.*, **59**:311–320.

Simetrinių diskrečiųjų daugiamačių vektorių sudėtinės Puasono aproksimacijos

Simona Jokubauskienė

Vytauto Didžiojo universitetas

Laikysime, kad

$$\vec{X} \sim F \in \mathcal{F}_d^s; \quad \text{supp } F \subset \mathbb{Z}^d, \quad q := F\{\vec{0}\} \in (0, 1). \quad (1)$$

Kaip ir įprastai, $p_{\vec{x}} = \mathbb{P}(\vec{X} = \vec{x})$ ir $\sum_{\vec{x}}$ žymi sumavimą pagal visus $\vec{x} \in \mathbb{Z}^d \setminus \{\vec{0}\}$. Tegul

$$\delta(y) = \sum_{\vec{x}} \min(1; yep_{\vec{x}}).$$

Pastebėsime, kad

$$\delta(y) \leq ye(1 - q), \quad \delta(y/k) \leq \delta(y), \quad k \geq 1.$$

Šaltinyje [1] buvo daroma prielaida, kad visi gardeliniai skirstiniai įgyja reikšmes, esančias koordinačių ašyse, turi baigtines dispersijas ir įgyja nulinę reikšmę su pakankamai didelėmis tikimybėmis. Galima pastebėti, kad šis rezultatas negalioja kai $d = 1$, $p_i = 1/2$. Mes parodėme, kad vienodai pasiskirsčiusiems atsitiktiniams vektoriams visos prielaidos gali būti reikšmingai susilpnintos. Taip pat šaltinyje [1] visas dėmesys skiriamas aproksimacijos tikslumui, o ne konstantų dydžiui. Mūsų teorema, kurią pristatysime pranešime, suteikia bendrą supratimą, kokių konstantų galima tikėtis, kai n yra didelis.

Teorema 1 *Sakykime, tenkinama (1) sąlyga. Tuomet bet kokiam $n \in \mathbb{N}$*

$$d_{TV}(F^{*n}; \exp\{n(F - I)\}) \leq \frac{4\delta^2(n/2)}{e^2 n} \left(1 + \frac{C(\delta(nq) + 1)}{q^4 \sqrt{n}}\right) + \frac{C(1 - q)^{9/2}}{q^{7/2} n \sqrt{n}}.$$

Literatūra

- [1] Kruopis J. and Čekanavičius V. 2014. Compound Poisson approximations for symmetric vectors. *J. Multivariate Anal.*, 123, 30–42.

Atstatymo proceso hipotezių tikrinimas esant lokaliajam asimptotiniam normalumui

Vaidotas Kanišauskas

Vilniaus universitetas

Ištyrus asimptotines stochastinių integralų, priklausančių nuo atstatymo proceso ir jo kompensatoriaus, savybes ir supaprastinus lokalaus asimptotinio normalumo galiojimo sąlygas atsiranda galimybė taikyti asimptotiškai lokaliai galingiausią kriterijų tikrinant atstatymo proceso parametrines statistines hipotezes.

Konkordacijos matai, Borroni konstrukcija ir pavyzdžiai

Martynas Manstavičius

Vilniaus universitetas, Matematikos ir informatikos fakultetas, Matematikos institutas

Pranešime bus kalbama apie dvimačių kopulų aibėje apibrėžtų konkordacijos matų, apibendrinančių klasikinius Spearman'o ρ ir Kendall'o τ , konstrukciją pasitelkiant Borroni generatorius. Bus akcentuojami pavyzdžiai ir naujos išvalgos apie konkordacijos matų aibę.

Atsitiktinai sustabdytos sumos reguliarumo poveikis stabdymo momentui

Jonas Šiaulys[†], Aistė Elijio[†], Remigijus Leipus[‡], Neda Nakliuda[†]

[†] Vilniaus universitetas, Matematikos institutas.

[‡] Vilniaus universitetas, Taikomosios matematikos institutas.

Sakoma, kad pasiskirstymo funkcija F turi reguliariai kintančią uodegą ($\bar{F}(x) = 1 - F(x)$) su rodikliu $\alpha \geq 0$ ($F \in \mathcal{R}_\alpha$), jeigu $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}(xy)}{\bar{F}(x)} = y^{-\alpha}$ bet kuriam fiksuotam teigiamam y . Sakoma, kad pasiskirstymo funkcija turi dominuojančiai kintančią uodegą ($F \in \mathcal{D}$), jeigu $\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}(xy)}{\bar{F}(x)} < \infty$ bet kuriam $y \in (0, 1)$. Pagal apibrėžimus nesunku patikrinti, kad $\mathcal{R} = \bigcup_{\alpha \geq 0} \mathcal{R}_\alpha \subset \mathcal{D}$. Sakykime $\{\xi_1, \xi_2, \dots\}$ yra nepriklausomų, vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių seka, o ν yra skaičiuojantis atsitiktinis dydis ($\mathbb{P}(\nu \in \mathbb{N}_0) = 1, \mathbb{P}(\nu > 0) > 0$) nepriklausomas nuo sekos $\{\xi_1, \xi_2, \dots\}$. Suma $S_\nu = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_\nu$ įprastai vadinama atsitiktinai sustabdyta suma. Straipsnyje [1] yra įrodytas toks tvirtinimas

• *Sakykime atsitiktinių dydžių seką sudaro neneigiamo atsitiktinio dydžio ξ nepriklausomos kopijos. Jeigu atsitiktinai sustabdytos sumos S_ν pasiskirstymo funkcija F_{S_ν} priklauso klasei $\mathcal{R}_\alpha$ su $\alpha > 0$, $\mathbb{E}\xi < \infty$, $\mathbb{E}\nu < \infty$ ir $\bar{F}_\xi(x) = o(\bar{F}_{S_\nu}(x))$, tai $F_\nu \in \mathcal{R}_\alpha$ ir*

$$\bar{F}_{S_\nu}(x) \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} (\mathbb{E}\xi)^\alpha \bar{F}_\nu(x)$$

Darbe [2] mes įrodome analogišką teiginį pasiskirstymo funkcijų klasei $\mathcal{D}$:

• *Sakykime atsitiktinių dydžių seką sudaro neneigiamo atsitiktinio dydžio ξ nepriklausomos kopijos. Jeigu atsitiktinai sustabdytos sumos S_ν pasiskirstymo funkcija F_{S_ν} priklauso klasei $\mathcal{D}$, $\mu = \mathbb{E}\xi < \infty$, $\mathbb{E}\nu < \infty$ ir $\bar{F}_\xi(x) = o(\bar{F}_{S_\nu}(x))$, tai $F_\nu \in \mathcal{D}$ ir bet kuriam fiksuotam $\varepsilon \in (0, 1)$:*

$$\bar{F}_{S_\nu}((1 + \varepsilon)\mu x) \underset{x \rightarrow \infty}{\lesssim} \bar{F}_\nu(x) \underset{x \rightarrow \infty}{\lesssim} \bar{F}_{S_\nu}((1 - \varepsilon)\mu x).$$

Literatūra

- [1] Faÿ, G., González-Arévalo, B., Mikosch, T. and Samorodnitsky, G. 2006. Modelling teletraffic arrivals by a Poisson cluster process. *Queueing Systems* 54, 121-140.
- [2] Šiaulys, J., Elijio, A., Leipus, R. and Nakliuda, N. Regularity of a randomly stopped sum determines regularity of the stopping moment. *Submitted to LMJ*.

Ribinė teorema apibendrintoms Hill statistikoms

Marijus Vaičiulis

VU Duomenų mokslo ir skaitmeninių technologijų institutas

Apibendrintų Hill statistikų šeimą sudaro statistikos

$$H_n(k, r) = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k h_r \left(\frac{X_{n-j+1, n}}{X_{n-k, n}} \right),$$

kur $X_{n,1} \leq X_{n,2} \leq \dots \leq X_{n,n}$ yra stebinių $X_1, \dots, X_n$ variacinė eilutė, kurios viršutinė dalis $X_{n-k, n} \leq \dots \leq X_{n,n}$ yra naudojama $H_n(k, r)$ apskaičiuoti, r yra realus derinimo parametras ir

$$h_r(x) = \begin{cases} \ln(x), & r = 0, \\ (x^r - 1)/r, & r \neq 0. \end{cases}$$

Apibendrintų Hill statistikų šeimą įvedė Paulauskas ir Vaičiulis [1]. Paminėtame straipsnyje, be kitų rezultatų, yra įrodytas toks teiginys: jei stebiniai yra nepriklausomi, vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai, kurių pasiskirstymo funkcijos dešinė uodega $1 - F$ tenkina reguliaraus kitimo sąlygą

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1 - F(tx)}{1 - F(t)} = x^{-1/\gamma}, \quad x > 0, \quad (1)$$

kur $\gamma > 0$ yra ekstremalių reikšmių indeksas, seka $k = k_n$ yra tokia, kad

$$k_n \rightarrow \infty, \quad n/k_n \rightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty \quad (2)$$

ir

$$\gamma r < 1, \quad (3)$$

tai $H_n(k, r) \xrightarrow{P} \Lambda_r(\gamma)$, $n \rightarrow \infty$, čia $\Lambda_r(\gamma) = \gamma/(1 - \gamma r)$.

Pranešime bus pristatytas [2] straipsnyje įrodytas rezultatas, kuriame aptariama (atitinkamai normuotų) atsitiktinių vektorių sekos

$$(H_n(k, r_1) - \Lambda_{r_1}(\gamma), \dots, H_n(k, r_\ell) - \Lambda_{r_\ell}(\gamma)), \quad n = 1, 2, \dots$$

ribinė elgsena, kai $r = \max\{r_1, \dots, r_\ell\}$ tenkina (3) sąlygą, pasiskirstymo funkcija F tenkina taip vadinamą antros eilės reguliaraus kitimo sąlygą, detalizuojančią, koku greičiu $(1 - F(tx))/(1 - F(t))$ artėja prie $x^{-1/\gamma}$ riboje (1), o seka $k = k_n$ tenkina (2) bei papildomą, charakterizuojančią jos augimą, sąlygas.

Literatūra

- [1] Paulauskas, V. and Vaičiulis M. 2013. On the improvement of Hill and some others estimators. *Lith. Math. J.*, 53:336–355.
- [2] Vaičiulis, M. 2025. A multivariate limit theorem for generalized Hill statistics. *Lith. Math. J.*, 65:117–133.

Informatika ir dirbtinis intelektas

Iteracinis agentinio modelio kūrimas nerimo sklaidai modeliuoti

Vitalij Denisov[†], Aistė Diržytė[‡], Leonidas Sakalauskas[†]

[†] Klaipėdos universitetas

[‡] Mykolo Romerio universitetas

Nerimas yra sudėtingas psichologinis reiškiny, kurį lemia įvairūs kognityviniai, emociniai ir fiziologiniai procesai. Nors nerimo sklaidos mechanizmai vis dar išlieka nepakankamai ištirti, ankstesniuose autorių darbuose buvo parodyta, kad matematinio modelio formulavimas ir kompiuteriniai eksperimentai su jo pagrindu sukurtais imitaciniais modeliais gali padėti integruoti įvairius nerimo sklaidos aspektus bei suteikti išsamesnį supratimą apie nerimą kaip atsaką į grėsmės stimulus [3]. Pasiūlytas hibridinio modeliavimo metodas remiasi papildytu kognityviniu TVAPA modeliu [2] ir apjungia agentais grįstą modeliavimą, kompartmentinius sistemų dinamikos modelius ir mašininio mokymosi metodus. Nerimo vertinimui taikoma keturių lygių STAI metodika, o socialinių medijų turinio sentimentų analizė naudojama siekiant nustatyti sukeliamųjų stimulų srauto parametrus.

Naujos tyrimų apžvalgos rodo, kad agentinis modeliavimas vis dažniau pasirenkamas kaip pagrindinis metodas modeliuojant reiškinius, kurie nėra gerai suprasti [1]. Net nežinodami, kaip veikia visa sistema ir kokie yra jos pagrindiniai būsenos kintamieji, tyrėjai gali pradėti nuo atskirų objektų identifikavimo, t. y. individualių agentų atributų ir elgsenos taisyklių apibrėžimo, o toliau modeliuojant agentų sąveikas, stebėti, kaip iš mikro lygmens elgsenos atsiranda makro lygmens (sisteminiai) dėsnai. Šiame darbe parodyta, kaip kuriant nerimo sklaidos agentinį modelį sudaromas ir tobulinamas formalus agentų elgsenos modelis, t. y., baigtinė būsenų mašina. Ją sudaro agentų būsenos ir perėjimai tarp jų, įvykiai, kurie sukelia tuos perėjimus ir veiksmi, kuriuos agentai atlieka per savo gyvavimo laiką. Aprašydami skirtingus perėjimų tipus, darome prielaidą, kad nerimas yra susijęs su informacijos apdorojimo procesais, o nerimo padidėjimas atitinka dirgiklius, suvokiamus kaip potencialios grėsmės. Sukurto agentinio modelio parametrai turi aiškią socialinę-informacinę reikšmę, o modelio patikra atlikta panaudojant atviros prieigos duomenų rinkinius.

Literatūra

- [1] Choi, T. and Park, S. 2021. Theory building via agent-based modeling in public administration research: vindications and limitations. *International Journal of Public Sector Management*, 34(6): 614-629.
- [2] Clark, D. and Beck, S. 2010. Cognitive Therapy of Anxiety Disorders: Science and Practice. *The Guilford Press*: New York, NY, USA.
- [3] Sakalauskas, L., Denisov, V. and Diržytė A. 2023. Hybrid Modeling of Anxiety Propagation in Response to Threat Stimuli Flow. *Mathematics* 11(19): 4121.

Dinaminis aktyvų paskirstymas mišriuose investiciniuose portfeliuose kintančių ekonominių ir politinių rizikų aplinkoje

Ilja Jurčenko[‡], Igoris Belovas[†]

[†] Vilniaus universitetas

[‡] ISM Vadybos ir ekonomikos universitetas

Darbo tema yra dinaminis investicinio portfelio valdymas, reaguojant į ekonominės būklės pokyčio momentą. Krizės laikotarpiu tinkamu metu duotas signalas modifikuoja investicijų portfelio struktūrą, persiorientuojant į saugesnius vertybinius popierius ir sumažinant galimus nuostolius. Darbe analizuojamos įvairios dinaminio portfelio valdymo metodologijos, nuo klasikinių trendo sekimo modelių iki šiuolaikinių mašininio mokymosi algoritmų. Literatūros analizė leido nustatyti esminę tyrimų spragą: stokojama darbų, kuriuose daugiaparametrinio režimo aptikimo modeliai būtų taikomi kartu įtraukiant nepastovias ekonomines ir politines rizikas. Atsižvelgiant į šią spragą, darbe siūloma ir įgyvendinama nauja investicinio portfelio valdymo strategija. Pagrindinis siūlomos strategijos komponentas yra rizikos filtras, koreguojantis pasirinkto algoritmo paskirstytus svorius atsižvelgiant į nustatytą ekonominę būseną. Tyrime nagrinėjamas rizikos filtro sąveikos efektyvumas su skirtingais alfa generuojančiais modeliais. Gauti rezultatai rodo, kad siūloma strategija pasižymi aukštesniais Šarpo, Sortino ir pelno koeficientais nei pasyvaus investavimo strategijos. Taip pat nustatyta, jog skatinamojo mokymo modeliai turi polinkį į persimokymą, kas gali riboti jų pritaikomumą praktikoje.

Šnekos signalo kokybės didinimas naudojant gilųjį mokymąsi ir triukšmo profiliavimą

Grażina Korvel, Justina Ramonaitė, Daniel Zakševski, Gintautas Tamulevičius

Vilniaus universitetas

Šneka yra pagrindinė žmonių tarpusavio bendravimo priemonė, tačiau šnekos kokybę ir suprantamumą mažina aplinkos triukšmas. Be to, jis apsunkina daugelį užduočių, susijusių su šnekos signalų apdorojimu. Šiai problemai spręsti yra kuriami šnekos signalo kokybės didinimo algoritmai. Darbe siūlomas naujas metodas, kuris paremtas žmogaus klausos sistemos modeliavimu ir triukšmo profiliavimu. Pagrindinė darbo idėja grindžiama žmogaus gebėjimu ne tik atskirti šneką nuo foninio triukšmo, bet ir adaptyviai interpretuoti garsinę informaciją remiantis triukšmo charakteristikomis. Pasiūlytas sprendimo būdas apjungia triukšmo profiliavimo ir triukšmo šalinimo procesus. Pirmieji eksperimentai parodė, kad mašininio mokymosi modeliai gali tiksliai identifikuoti triukšmo tipus pagal signalo spektrines charakteristikas, o toks profiliavimas leidžia pritaikyti specifines šnekos modifikacijas skirtingiems triukšmams. Triukšmo šalinimui iš signalo naudojamos giliojo mokymosi architektūros, kurios leidžia tiesiogiai apdoroti signalą laiko srityje. Eksperimentų rezultatai atskleidė reikšmingą šnekos kokybės pagerėjimą, įvertintą tiek objektyviaisiais (SNR, MSE), tiek suvokimu pagrįstais (PESQ) kokybės rodikliais.

Aktualių kredito rizikos įvertinimo algoritmų palyginimas

Simas Rimašauskas, Igoris Belovas, Rolandas Gričius

Vilniaus universitetas

Kredito rizikos įvertinimas yra būtinas priimant įvairius finansinius sprendimus, ypač investuojant į skolos vertybinius popierius. Kadangi obligacijų rinka yra didžiausia vertybinių popierių rinka pasaulyje, egzistuoja didelė paklausa įrankiams, leidžiantiems tiksliai įvertinti emitento kreditingumą. Be to, informacija, nusakanti emitento nemokumo tikimybę, naudojama ir kitose srityse, tokiose kaip rizikos valdymas. Mašininio mokymosi ir didžiųjų duomenų eroje atsirado būdų, leidžiančių automatizuotai įvertinti riziką remiantis dideliu kiekiu duomenų. Tradicinis kreditingumo vertinimas gali būti netikslus, nes investuotojas gali būti šališkas arba klaidingai interpretuoti turimą informaciją. Moderniųjų įrankių, kurie leistų sumaniai apdoroti didelius informacijos kiekius, peržiūra padės kuo objektyviau įvertinti emitento kredito riziką.

Šiame darbe apžvelgti mokslinėje literatūroje vyraujančių šiuolaikinių kredito rizikos vertinimo algoritmų principai ir profesinėje praktikoje naudojami modeliai, apibūdintos jų stipriosios ir silpnosios pusės. Be to, algoritmai realizuoti bei patikrinti remiantis istoriniais duomenimis įvykdant eksperimentus. Dėl empiriškai įrodyto didelio tikslumo buvo realizuoti XGBoost, LightGBM, AdaBoost, logistinės regresijos ir atsitiktinio miško algoritmai.

Generalized Kolmogorov Brownian Field Model

Leonidas Sakalauskas[†], Neringa Urbonaitė[‡]

[†] Klaipėdos Universitetas [‡] Vilniaus universitetas

A family of fractal vector Brownian field distributions is introduced. Conditions are established when this family is consistent. It is shown that this family of distributions is defined using only fractal Euclidean distances between observation points, thereby generalizing an analogous property of the well-known Kolmogorov process. When defining this field, it is not necessary to know the covariance function, which is usually used to define random fields. It is shown that the developed model is a limiting case of a standard vector Brownian field, when the scale parameter of its covariance function approaches infinity and the variance approaches zero. The developed model is applied to the analysis of fractality spectra.

A maximum likelihood method is developed to estimate the model parameters, algorithms are proposed for generating field realizations, and variograms and kriging algorithms are developed. The results of computer modeling and real data analysis are presented, applying the developed model and methods based on it.

References

- [1] Pozniak N. and Sakalauskas L. 2019. Kriging Model with Fractional Euclidean Distance Matrices. *Informatica*, 30(2), pp. 367–390.
- [2] Sakalauskas L. 2013. Locally Homogeneous and Isotropic Gaussian Fields in Kriging. *Informatica*, 24(2), pp. 253–274.
- [3] Sakalauskas L. and Urbonaitė N. 2019. Application of vector fractal Brownian field model for data extrapolation and kriging. *11th international workshop on data analysis methods for software systems*, Druskininkai, Lithuania, November 28-30.

Efektyvus vandens ženklų taikymas didelių žiūrovų skaičiui identifikacijai

Deivis Zolba

Vilniaus universitetas

Nagrinėjami metodai, kaip integruoti žiūrovo identifikavimo informaciją į skaitmeninį turinį, tokį kaip vaizdo įrašai ar nuotraukos. Dažnių srities (frequency domain) vandens ženklinimo modeliai pasižymi dideliu atsparumu suspaudimui, regionų iškirpimui ir kitoms atakoms, tačiau jų taikymas masiniu mastu susiduria su reikšmingais skaičiavimo kaštais. Standartinis modelis reikalauja itin daug skaičiavimo išteklių, todėl nėra praktiškai pritaikomas plataus masto naudojimui.

Siūlomas sprendimas suskaido dažnio sritį į segmentus ir sukuria ženklų fragmentus, kuriuos galima įvairiai kombinuoti. Šis modelis yra gerokai efektyvesnis ir lengviau plečiamas: jis sumažina skaičiavimo sąnaudas ir leidžia sugeneruoti daug unikalių vandens ženklų variantų iš riboto fragmentų rinkinio.

Rodyklė

A

Alekna U., 25
Astrauskas R., 26, 29

B

Bakhit A., 27
Bareikaitė E., 51
Baronėnas Ž., 11
Bartkus K., 52
Belovas I., 33, 59, 73, 75
Bingelė K., 25
Birbilas A., 53
Birštunas A., 17
Bražėnas M., 43
Budzevičiūtė A., 51

Č

Čekanavičius V., 64

D

Dangi S. L., 44
Deinoravičiūtė U., 54
Denisov V., 72
Dindienė L., 46
Dirma M., 65
Diržytė A., 72
Drungilas P., 11
Dučinskas K., 55, 60

E

Eidukevičius R., 56
Elijio A., 69

G

Gabel S., 34
Gervytė M., 57
Geštautas A., 12
Gricius R., 75
Grigaliūnas M., 13
Grigaliūnienė M., 34
Grigolienė R., 58
Grigutis A., 14

I

Idzelytė, R., 8
Ilickienė I., 35
Iurchenko M., 28

J

Jablonskaitė K., 45
Jankauskas J., 11
Janutėnienė J., 58
Jokubaitis M., 59
Jokubauskienė S., 64, 66
Juozaitienė R., 35
Jurčenko I., 73

K

Kačinskaitė R., 15, 22
Kanišauskas V., 67
Kanišauskienė K., 36
Karaliutė M., 55, 60
Karbonskis A., 18
Kilienė I., 37
Konečná P., 34
Korvel G., 74
Kozulinas N., 29
Kudžma R. J., 7

L

Landauskas M., 45, 48
Lehtinen E., 34
Leipus R., 69
Levulienė R., 51

M

Macaitienė R., 16
Mačys J. J., 40
Maksimiak L., 17
Manstavičius E., 18
Manstavičius M., 68
Markevičiūtė J., 54
Mazėtis E., 38
Melnichenko G., 38
Mėžinė J., 8
Michalkovič A., 46, 49
Mikalauskaitė T., 19
Morkvėnaitė-Vilkončienė I., 29
Murauskas G., 61

N

Nakliuda N., 65, 69
Nekrašaitė-Liegė V., 62
Norvaiša R., 39
Novicki J., 30

Novikas A., 40

P

Pal M., 44

Poškuvienė K., 47

Pupalaigė K., 30

R

Račkauskas A., 52, 53

Radavičius M., 61

Ragulskis M. K., 47

Ramonaitė J., 74

Rimašauskas S., 75

S

Sabanskytė P., 48

Sajka M., 34

Sakalauskas E., 46

Sakalauskas L., 72, 76

Sapagovas M., 30

Semanišinė I., 34

Star J., 34

Striška L., 29

Š

Šaltytė Benth J., 9

Šiaučiūnas D., 20

Šiaulys J., 65, 69

Šimėnas R., 21

Štikonas A., 25, 27

Štikonienė O., 27

Šumskas V., 26, 31

T

Tamulevičius G., 74

Telksnienė I., 47

Togobickij B., 22

Treigys P., 54

Tuite J., 23

U

Urbonaitė N., 76

Urbonienė S., 35

V

Vaicekauskas A., 26

Vaičiulis M., 70

Vainorė G., 58

Valakevičius E., 43

Vilkas R., 41

Z

Zakševski D., 74

Zolba D., 77

Ž

Žitkevičius J., 49

Žvirblis T., 57

Klaipėdos universiteto leidykla

LIETUVOS MATEMATIKŲ DRAUGIJOS LXVI KONFERENCIJOS SANTRAUKOS

Leidinio forma: Elektroninis – PDF

SL 1335. 2025 06 27. Apimtis 10 sąl. sp. l.

Klaipėdos universiteto leidykla, Herkaus Manto g. 84, 92294 Klaipėda

Tel. (0 46) 398 891, el. paštas: leidykla@ku.lt; interneto adresas: <http://www.ku.lt/leidykla/>